PAOLO EMILIO AMICO-ROXAS

IL PROBLEMA DELLO SPAZIO E LA CONCEZIONE DEL MONDO

LA TEORIA ENDOSFERICA DEL CAMPO
O
SISTEMA COSMOCENTRICO

LIBRERIA EDITRICE UNIVERSITARIA D'ISA
VIA DEI MILLE, 24
ROMA 1960

PAOLO EMILIO AMICO-ROXAS

IL PROBLEMA DELLO SPAZIO E LA CONCEZIONE DEL MONDO

LA TEORIA ENDOSFERICA DEL CAMPO
O
SISTEMA COSMOCENTRICO

Con 16 tavole fuori testo e 27 figure nel testo

Indice-Sommario e Prefazione, in Italiano e in Inglese
Summary Index and Preface, in Italian and in English

LIBRERIA EDITRICE UNIVERSITARIA D'ISA
VIA DEI MILLE, 24
ROMA 1960

A Ulisse G. Morrow

Ad Anna

INDICE-SOMMARIO

16 tavole fuori testo, con 26 figure, alla fine del volume.

SUMMARY INDEX

PART II.

THE CLASSIC AND EINSTEIN'S WORLD

PREFAZIONE

Una nuova concezione del mondo? I grandi successi della Meccanica Celeste, le conferme notevolissime, nel campo sperimentale, della legge di Newton appaiono alla mente del fisico moderno e, più ancora, all'uomo della strada, come una riprova della verità della concezione classica del mondo (le modificazioni apportate da Einstein sono quantitativamente assai lievi). Tuttavia in questo libro si presenta una nuova concezione del mondo: gli stessi fatti, gli stessi esperimenti possono essere interpretati in altro modo. Si tratta, come diceva Einstein (30, b; 102), in ordine alle sue stesse teorie, di « nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo ». Il concetto di campo, affermatosi nel secolo scorso, sia in sede sperimentale, sia in sede teorica, con le celebri equazioni di Maxwell, è il concetto fondamentale di questa nuova Teoria. Il mondo è concepito come un campo: gli sviluppi ultimi e più imponenti della fisica fanno apparire il campo come la forma basilare e più naturale di attività dell'energia. L'Universo, questa immensa riserva di energia in incessante attività, appare quindi al fisico moderno come un campo. Tutti quei fatti, che la Teoria classica spiega, trovano una spiegazione altrettanto esauriente nella nuova concezione del mondo, la quale, inoltre, non solo consente effettuare calcoli e previsioni di fenomeni celesti con la stessa esattezza con cui vengono effettuati in base alla concezione copernicana, ma colma altresì importanti lacune del tradizionale concetto dell'Universo. Molto si parla dei lati positivi della concezione classica, poco dei suoi difetti. Molti sono coloro che sanno appena che un principio come quello della conservazione dell'energia viene violato in maniera sconcertante dalla Teoria classica, violazione che nemmeno la Teoria einsteiniana, ammettendo lo spazio ellittico, come dimostra Armellini (9, a, II, 159 e b, 304), è riuscita a colmare. Dell'immensa quantità di energia emessa dal Sole soltanto 20 miliardesimi circa vengono utilizzati dai pianeti: tutto il resto non viene recuperato, ma va completamente perduto! Eddington sottolinea (20, a; 102) la « strana combinazione » della simmetrica caduta dei raggi cosmici sulla superficie terrestre. La legge di Newton implica

un mondo di infinite *masse. Lo spazio cosmico è uniforme (tale può considerarsi* praticamente *anche con le correzioni relativistiche), i moti in esso sono rigidi : è ancora Eddington* (29, *a* ; 131) *insieme ad altri, che rifiuta uno spazio privo di caratteristiche (curvature), osservando inoltre* (29, *a* ; 72) : « *L'*identità indifferenziata *e il nulla non si possono distinguere in via filosofica. Le realtà della fisica sono inomogeneità, eventi, cambiamenti* ». *La favolosa durata dei raggi luminosi di miliardi di anni-luce non può non lasciare perplesso il fisico, che si vede costretto ad accettarla non già perchè emerga da fatti sperimentali, ma perchè consegue dalle premesse da cui parte la concezione classica del mondo. Armellini sottolinea* (9, *b* ; 3 e 203) *due fatti* « singolari » : *La Terra è* il più denso *dei corpi del sistema solare ed è, inoltre, il* favorito *quanto alla sua abitabilità. Ora, come mai la Terra, che, nel concetto classico, è un* « *pianeta qualunque* », *presenta siffatta situazione di* « *privilegio* » *? Planck rileva* (73 ; 201) *la* « *singolare differenza* » *fra il comportamento degli elettroni, che possono circolare soltanto su orbite ben determinate che differiscono l'una dall'altra in modo discreto, e quello dei pianeti per i quali nessuna orbita sembra preferita rispetto ad un'altra: ciò è in contrasto con l'analogia, che si vuole affermare, fra l'atomo e il sistema planetario. Altri ancora sono i punti deboli della Teoria classica ; e sono scienziati come Eddington, Armellini, Planck ed altri di pari statura scientifica che li hanno ripetutamente rilevati. Una teoria che a fatti accidentali, oppure insoddisfacentemente spiegati, fornisce una spiegazione esauriente e razionale sembra meritare la considerazione di un esame e di una critica. L'identità fra massa pesante e massa inerte, che si presentava accidentale nella Teoria classica (lo stesso Newton l'aveva rilevata), nella fisica relativistica si presenta invece come un fatto fondamentale, ciò che fece dire ad Einstein* (30, *b* ; 46) : « *Un romanzo giallo è giudicato di qualità inferiore se spiega fatti strani come accidenti ; lo troviamo assai più soddisfacente se non si discosta da una linea razionale* ». *Fatti come la* simmetrica *caduta dei raggi cosmici sulla superficie terrestre, la particolare posizione della Terra, per quanto concerne la densità, rispetto ai corpi celesti, l'origine del magnetismo terrestre, la non uniformità dello spazio cosmico e la non rigidità dei moti, la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna,* discendono *dalla nuova Teoria, senza la necessità di introdurre nuove ipotesi più o meno artificiose, più o meno plausibili, mentre nella Teoria classica si presentano* « *strani come accidenti* ». *La nuova Teoria, dove gli stessi fatti* « *non si discostano da una linea razionale* », *appare più soddisfacente.*

La Teoria classica comporta fatti sorprendenti come, ad es., il rapido volo (3 *km/sec.*) *di Antares, che ha un diametro di* più di mezzo miliardo

di chilometri *e una densità* 2000 volte minore di quella dell'aria, *e come le velocità di decine di migliaia di km./sec. di milioni di « Soli «, che hanno diametri migliaia di volte superiori alla distanza Terra-Sole e densità dell'ordine di* 10^{-31} *(20 corpuscoli, atomi o elettroni liberi, per ogni centimetro cubo*), densità, *cioè*, miliardi di miliardi di volte minori di quella dell'aria. *Questi voli di corpi giganteschi, aventi densità vicinissime a zero e velocità non lontane da quella della luce, costituiscono fenomeni, in cui si stenta a credere. Nella nuova Teoria si hanno, invece, densità elevatissime, volumi ridotti e velocità riferite a unità di lunghezza* locali: *fenomeni questi sensibilmente più verosimili.*

Una nuova Teoria del mondo implica l'esame di molteplici problemi: quale di questi è il primo e fondamentale? Non appena consideriamo che lo studio dell'Universo si fonda essenzialmente su fattori ottici, in particolare sulla legge di propagazione della luce, dobbiamo convenire che il problema primo e più importante da esaminare è quello dello spazio. Cos'è lo spazio? Esiste in sè, come luogo ove sono collocati i corpi, o si identifica con il mondo esterno, con le cose, di cui percepiamo certe relazioni, certe proprietà? E, inoltre, la nozione di spazio sorge come risultato della nostra esperienza sensibile o si trova insita a priori *nella nostra mente? A questi problemi ho dedicato tutta la prima parte di questo lavoro, dove il concetto di spazio viene esaminato nel suo sviluppo attraverso i maggiori pensatori dell'antichità, come Parmenide, Zenone, Democrito, Platone, Aristotele fino a Galilei, Newton, Hume, Kant, Leibniz, Lobacevskij, Poincaré, Veronese, Enriques, Einstein, Eddington. Ho esposto le ragioni per cui il pensiero moderno rifiuta il concetto dello spazio vuoto, assoluto, e la genesi kantiana dell'idea di spazio, affermando invece che lo spazio fisico non è che il mondo esterno, alla cui rappresentazione obiettiva si giunge per gradi, mediante associazioni e confronti delle diverse percezioni, dei diversi spazi fisio-psicologici, percepiti attraverso il senso della vista, del tatto e del senso muscolare. Gli spazi fisio-psicologici, a seconda degli organi che vi intervengono, sono, quindi: lo spazio ottico, lo spazio tattile e lo spazio del senso muscolare. Dopo aver distinto spazio psicologico (soggettivo) e spazio fisico (obiettivo) ho esaminato le ragioni, sulle quali insisteva Veronese, per cui deve distinguersi tra spazio fisico o concreto e spazio geometrico o astratto, tra Fisica e Geometria. Con un esame approfondito mi sono indugiato sul significato da attribuire alla «curvatura» dello spazio (fisico), trattando, inoltre, dei diversi spazi fisici: spazio atomico, spazio ordinario o terrestre, spazio astronomico.*

Lo spazio astronomico è essenzialmente ottico, o, se si vuole, elettromagnetico, dato che l'abbiamo in parte esplorato con onde e segnali

radio di natura, come la luce, elettromagnetica. Pertanto, a differenza dello spazio atomico e dello spazio ordinario, lo spazio astronomico non si può agevolmente obiettivare: non è possibile confrontare in esso lo spazio tattile con lo spazio ottico. Non resta che formulare ipotesi: poichè si ammette per ipotesi la propagazione rettilinea (nel senso euclideo) delle radiazioni luminose o elettromagnetiche, si ammette altresì per ipotesi che lo spazio astronomico, supposto omogeneo, è euclideo. La prima parte del libro si chiude con una ampia esposizione dei metodi per determinare masse, distanze, volumi, densità, temperature e velocità degli astri, sottolineando il fatto fondamentale che tutti quei metodi, quelle relazioni, quelle equazioni attingono il loro significato dall'ipotesi, su cui si fondano, che lo spazio astronomico sia euclideo (le correzioni apportate da Einstein praticamente *non modificano tale posizione), o, più precisamente, dall'ipotesi che le grandezze e le variabili, che in quelle formule figurano, abbiano significato euclideo.*

La Parte II è dedicata al mondo di Einstein. Rilevati alcuni punti deboli della Teoria di Newton (essenzialmente tre: spazio assoluto e tempo assoluto, azioni a distanza delle forze gravitazionali, identità « accidentale » fra massa inerte e massa pesante), Einstein espone la sua Teoria della Relatività Particolare nella quale spazio e tempo non sono più assoluti: assoluto è lo spazio-tempo o cronotopo. Sulla scia di maestri quali Straneo ed altri, ho illustrato il corretto significato delle equazioni di Lorentz, alle quali alcuni fisici, fra cui Langevin, avevano attribuito interpretazioni fantasiose (come la famosa storiella dei due gemelli). Gli altri due punti deboli della Teoria newtoniana vengono colmati da Einstein con la sua Teoria della Relatività Generale: le due astrazioni classiche sovrapposte (la legge di inerzia e il campo statico delle forze) si fondono in una legge unica, la legge di inerzia generalizzata, che coincide con la legge di gravitazione. Le forze gravitazionali si propagano a contatto. Se in sede pratica la Relatività Generale non modifica sensibilmente la Teoria classica, in sede teorica invece la portata di tale concezione è enorme. L'Universo reale, *secondo la Teoria di Einstein,* non è euclideo, *la propagazione della luce è rettilinea in senso non euclideo (i raggi luminosi percorrono geodetiche, che, in senso euclideo, sono curvilinee), la velocità della luce non è costante, i moti dei corpi non sono rigidi. Il mondo di Einstein,* qualitativamente, *è profondamente diverso da quello classico. Il concetto di spazio, grazie alla Teoria einsteiniana, segna una svolta storica nel corso della sua evoluzione: il mito dello spazio euclideo cade.*

Nella Parte III espongo la nuova concezione del mondo, che, qualitativamente, non differisce dalla Teoria della Relatività Generale.

La nuova Teoria ammette uno spazio non euclideo a curvatura variabile, ammette che la propagazione della luce avviene lungo geodetiche non euclidee (curvilinee), che la velocità della luce non è costante, che i moti dei corpi non sono rigidi. E' particolarmente notevole che il nuovo concetto non implichi nessuna ipotesi essenzialmente nuova rispetto alla Teoria di Einstein. La differenza fra le due Teorie è solo di ordine quantitativo. *Le curvature spaziali, trascurabili in Einstein, sono, invece, sensibili nella nuova Teoria ; lo stesso dicasi per quanto concerne la non rigidità dei moti.*

Lo spazio della nuova concezione, caratterizzato dalle leggi del campo, mediante l'applicazione della trasformazione per raggi vettori reciproci si muta nello spazio classico di Euclide. Non deve sorprendere che fra le geodetiche curvilinee del campo (percorse dai raggi luminosi), il comportamento del quale è soggetto a leggi ben determinate, e il prolungamento *dei raggi luminosi, come dirò subito, nella direzione in cui entrano nell'occhio, sussista una relazione esprimibile matematicamente. D'altra parte parlare di* prolungamento *e parlare di* retta *o* geometria euclidea *è esattamente la stessa cosa.*

Il campo ha per sorgenti il Sole e il Centro Stellare ed è attorniato dalla superficie concava della Terra. Le onde elettromagnetiche (luminose), che percorrono geodetiche curvilinee, nelle vicinanze della superficie terrestre percorrono geodetiche di così lieve curvatura, che appaiono rettilinee : di qui l'ipotesi della propagazione rettilinea della luce. Nelle profondità spaziali, invece, le curvature vanno via via accentuandosi fino a diventare infinite. L'ipotesi della propagazione rettilinea della luce, connessa al fatto che prolunghiamo mentalmente i raggi luminosi che raggiungono l'occhio (ogni oggetto o sorgente luminosa appare trovarsi nella direzione con la quale i raggi luminosi, uscenti da detto oggetto o sorgente luminosa, penetrano nell'occhio o nella camera oscura di una macchina fotografica), ha fatto credere, per millenni, che il mondo endosferico fosse esosferico, che lo spazio curvo fosse euclideo, che il bastimento, che scompare sotto la tangente curvilinea *della superficie concava della Terra, scomparisse sotto la* tangente *supposta* rettilinea *della superficie « convessa » della Terra. La trasformazione circolare, che lega lo spazio reale endosferico con lo spazio esosferico dell'ipotesi classica, implica che ogni relazione valida in uno dei due spazi lo è anche nell'altro. La legge di Newton conserva, pertanto, nel nuovo spazio, piena validità. In maniera rigorosa si spiegano, nel mondo endosferico, tutti i fenomeni spiegati dalla Teoria classica : l'alternarsi del giorno e della notte, le stagioni, le fasi lunari, l'eclissi solare e quella lunare, le occultazioni stellari, ecc. Calcoli e previsioni di fenomeni celesti possono effettuarsi nel nuovo spazio con la stessa*

esattezza con cui li effettua l'Astronomia classica. I razzi lanciati nello spazio (Explorer, Pioneer, Sputnik, Lunik) non costituiscono esperimenti cruciali, *tali cioè da discriminare tra le due teorie per decidere quale di esse è la* vera : *siffatti esperimenti trovano in entrambe le teorie una spiegazione razionale soddisfacente. Una stessa formula, una stessa relazione od equazione, acquista significati diversi a seconda del significato che attribuiamo alle grandezze o variabili, che vi figurano. La Teoria ottica di Fresnel era essenzialmente diversa da quella di Maxwell; tuttavia entrambe le teorie soddisfacevano allo scopo precipuo di prevedere fenomeni ottici. Le equazioni differenziali, che esprimevano le due* diverse *teorie, erano quasi le* stesse: *figurava in esse uno* stesso *rapporto fra qualcosa e qualche altra cosa; solo che questo qualcosa Fresnel lo chiamava* movimento *e Maxwell lo chiamava, invece,* corrente elettrica (*Poincaré:* 74, *a*; 155). «*La matematica, scrive Russel, è una scienza, nella quale non si sa di che cosa si parli e non si sa se quello che si dice è vero*».

Tutte le relazioni della Meccanica Celeste classica, fondata sullo spazio euclideo, sono valide nella nuova cosmogonia, purchè alle grandezze o variabili, che vi figurano, si attribuiscano i significati propri dello spazio non euclideo a curvatura variabile del mondo endosferico. Nella nuova concezione viene data una esauriente spiegazione di molti punti oscuri della Teoria classica: nel mondo endosferico è rispettata la legge della conservazione dell'energia (non vi è dispersione dell'energia emessa dal Sole e dai bilioni di «Stelle-Soli»), la simmetrica *caduta dei raggi cosmici sulla superficie terrestre non appare più una «strana combinazione» (come la chiamava Eddington), ma si presenta come un fatto perfettamente naturale, così come* discendono *dalla Teoria medesima, come già abbiamo detto, l'origine del magnetismo terrestre, la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza luna e il fatto che la Terra è* meno *densa di tutti i corpi celesti (la Terra non è un «pianeta»). Il nuovo concetto del mondo, mentre fornisce una spiegazione razionale a tutti i fatti e fenomeni spiegati dalla Teoria classica, spiega altresì razionalmente diversi fatti, che nella Teoria copernicana si presentano come accidenti o vengono spiegati insoddisfacentemente. La Concezione Endosferica è, infine, una Teoria più generale della Teoria della Relatività Generale, giacchè ammette questa come «caso particolare».*

La Teoria Endosferica o Sistema Cosmocentrico ha avuto, in passato, diversi propugnatori, che la denominarono «Teoria del mondo cavo». Essi sono, fra gli altri, i tedeschi Karl Neupert, Johannes Lang e P. A. Müller e l'americano Cyrus Reed Teed. Non mi soffermo, però, sulle argomentazioni, con cui detti Autori giustificano la Teoria, perchè le ritengo

*deboli, e ciò principalmente per il fatto che poggiano sulla ipotesi dello spazio euclideo ; inoltre non mi pare che il rigore scientifico vi venga sufficientemente rispettato. Molti anni fa, io stesso divulgai la Teoria di Neupert, ma me ne separai presto definitivamente. Di tutti gli assertori del nuovo concetto del mondo di gran lunga il più considerevole stimo sia l'americano Ulisse G. Morrow, morto l'*11 *settembre* 1950, *all'età di* 86 *anni (era nato il* 26 *ottobre del* 1864, *nel villaggio di Freedom, nel Barren County, Kentucky) ; ebbi con lui un intenso contatto epistolare dal* 1934 *fino alla sua morte. Tale carteggio si divide in due periodi : il primo va dal* 1934 *al* 1939 *mentre mi trovavo in Argentina ; il secondo dal* 1940, *anno in cui tornai in Italia, fino al* 1950. *Morrow è l'autore dei disegni, che appaiono, con qualche modificazione apportata da me, nelle Tavole, meno l'ultima, la quale è dovuta all'abilità del Signor Fr. Zimmerli, di Zurigo, subendo, però, per opera mia, una modificazione sostanziale. Sia i* 26 *disegni delle* 16 *Tavole che i* 27 *disegni inseriti nel testo sono stati eseguiti da Raimondo Morici, che desidero ringraziare per la cura e l'intelligenza adoprate nel suo compito.*

Morrow trovò un metodo per effettuare praticamente i procedimenti di inversione ; fece alcuni esperimenti nella spiaggia della Florida, negli Stati Uniti, per provare la concavità della Terra, ma poi si avvide del suo errore (come mi scrisse con lettera datata 28 *nov.* 1946), *nel senso che il nuovo concetto del mondo è una* nuova Teoria dello spazio (*uno spazio in cui i moti non sono rigidi): è precisamente, come egli stesso la chiamò,* « la Teoria del Campo ». *L'opera di Morrow si limitò essenzialmente alla parte geometrica e alla descrizione, nelle grandi linee, della fisica dell'Universo, nella configurazione di un campo. Vi erano, tuttavia, nell'opera di Morrow alcuni spunti per uno sviluppo organico e per una rielaborazione sistematica di tutta la materia, ciò che ho condotto a termine in questo mio lavoro. Si trattava di risolvere, inoltre, diversi problemi, fra cui quello dell'« attrazione terrestre », la quale, essendo nullo il campo all'interno di una sfera cava, più non sussisteva, e la variazione dell'accelerazione di gravità, che, nel mondo endosferico, esigeva una spiegazione parzialmente diversa. A questi e ad altri problemi, connessi con la Teoria, credo di aver dato una soluzione soddisfacente. Ulteriori sviluppi ho effettuato specialmente per quanto concerne l'applicazione al nuovo spazio delle formule classiche : ho ricavato, a mo' d'esempio, la* velocità di fuga, *mediante la relazione di Newton, mostrando che la validità di quella legge sussiste* purchè *alle grandezze, che figurano in quella equazione, si attribuiscano i valori propri dello spazio non euclideo a curvatura variabile del mondo endosferico. Particolare cura ho posto nell'esporre l'evoluzione*

del concetto di spazio nel corso della storia e, parallelamente, l'evoluzione del concetto del mondo da Newton ad Einstein, da Einstein alla Teoria Endosferica. La Teoria di Newton è un caso particolare della Relatività Ristretta, la Relatività Ristretta è un caso particolare della Relatività Generale, la Relatività Generale è un caso particolare della Teoria Endosferica. Credo di aver dato a tutta la materia una struttura organica e un rigore che non aveva mai avuto prima d'ora. Ho mostrato che la nuova concezione del mondo si inserisce nel campo scientifico spontaneamente, come una conseguenza degli sviluppi ultimi della Fisica e delle moderne idee cosmogoniche. E se un riconoscimento verrà concesso alla mia fatica, in gran parte lo dovrò al consiglio e all'incoraggiamento, ricevuto durante molti anni, da parte di Morrow, che considero il mio Maestro.

Ho detto or ora come la Teoria Endosferica si inserisca nel campo della scienza come una nuova tappa, una nuova avanzata del pensiero scientifico attorno alla struttura dell'Universo. Le relazioni della nuova concezione con lo sviluppo della scienza moderna sono in queste pagine ampiamente illustrate. Ho citato numerosi passi e brani di Autori di altissimi meriti e di vasti riconoscimenti nel mondo scientifico e filosofico, come Lobacevskij, Poincaré, Eddington, Einstein, Enriques, Armellini, Castelnuovo, Albergamo, Bridgman, Persico, Finzi, Perucca, Lämmel, Levi-Civita, Planck, Sambursky, Straneo, Veronese ed altri, oltrechè passi di Newton e di Kant. A questo proposito mi piace ricordare quanto scrive Bridgman nella prefazione alla sua «Logica della Fisica Moderna» (16 ; 14) : *«Se qualche passo richiama brani scritti da altri autori, è perchè le loro idee sono state da me assimilate dimenticandone la fonte». Questo stesso è occorso probabilmente anche a me, sebbene mi sia sforzato di riportare, il più possibile, nella stessa lezione di tali autorità scientifiche (anche le sottolineature riportate sono degli stessi autori), concetti, asserzioni, esperimenti e loro interpretazioni (facenti parte del patrimonio scientifico universalmente accettato) riguardanti gli argomenti da me trattati e ciò per due motivi: in primo luogo perchè la portata delle conclusioni di questo libro è tale da rendere opportuno che il lettore discerna bene in che cosa consista l'effettivo nucleo di pensieri e concetti nuovi, rimanendo chiaramente edotto del fatto che molteplici concetti legati alla nuova Teoria non costituiscono alcuna novità, perchè sono stati già elaborati da tempo, e si trovano, ormai, inseriti nel positivo patrimonio culturale di tutti i paesi; in secondo luogo perchè si possa valutare l'effettiva portata delle nuove idee nella loro giusta luce.*

Concetti e passi d'Autore sono stati qua e là ripetuti: si tratta di concetti e di citazioni di fondamentale importanza per l'argomento in

oggetto. Ho preferito ripetermi piuttosto che distrarre il lettore obbligandolo a rileggere altrove quel concetto o quel passo. Più d'una volta mi sono indugiato a svolgere concetti relativamente elementari e a sviluppare passaggi analitici superflui per molti : data la tesi inconsueta del lavoro, ho considerato opportuno alleggerire, il più possibile, il lettore di qualche sforzo di memoria. Ho cercato, in breve, di essere quanto mai chiaro e di rendere il più agevole possibile la lettura del libro. Non vi sono note al piè delle pagine ; personalmente le ho trovate sempre poco comode : prima di tutto perchè scritte in tipi più piccoli di quelli del testo, a volte troppo piccoli, e, quindi, poco agevoli per la lettura, e poi perchè spesso si pensa che ciò che è in nota non è molto importante, mentre non credo che un libro accurato contenga, rispetto all'argomento trattato, passi non importanti, e ciò me lo prova il fatto che, spesso, ho trovato nelle note di molti libri concetti e notizie, che dovevano esser posti, per la loro importanza, in grassetto, nel testo.

Le citazioni sono riferite con due numeri in parentesi : il primo è il numero d'ordine, che l'Autore citato ha nella bibliografia, seguito, a volte, da una lettera dell'alfabeto quando le opere dell'Autore, nella bibliografia, sono più di una ; il secondo numero è la pagina dove trovasi il passo riportato. In questa stessa prefazione mi sono già attenuto a questo sistema.

La lettura del lavoro richiede un piccolo sforzo per quanto riguarda l'atteggiamento mentale del lettore. « Una delle novità più notevoli della Fisica recente, scrive Bridgman, (16 ; 15) *è il cambiamento di atteggiamento verso quello che si può chiamare l'aspetto interpretativo della Fisica ». La nuova concezione del mondo esige, appunto, un diverso atteggiamento mentale verso fatti e fenomeni notissimi della Fisica. Scrive Planck* (73 ; 107) : *« Se abbiamo a che fare per la prima volta con un fenomeno insolito, ne siamo altamente stupiti ; se lo vediamo per la decima volta lo troviamo naturale ; se lo vediamo per la centesima volta, non sentiamo più il bisogno di spiegarlo e cerchiamo forse di dimostrarne la necessità ». Altrettanto avviene, oltre che per i fenomeni, anche per i concetti originali di novatori, concetti che, quando poggiano su solide basi, prima stupiscono, poi vengono trovati naturali e, infine, necessari. Così è avvenuto per più di una rivoluzione filosofica o scientifica. Così è accaduto, in particolare, per il Sistema Eliocentrico di Copernico. Le opere di Lobacevskij e Bolyai non ebbero, al loro sorgere, quell'accoglienza, che tanti secoli di lenta e continua preparazione sembravano promettere : la storia della scienza ci insegna che ogni radicale mutamento nelle singole discipline non abbatte d'un tratto le convinzioni, i preconcetti, su cui i pensatori, gli studiosi, attraverso un lungo periodo, edificarono le loro dottrine.*

« Gauss, scrive Veronese (90), *convinto dell'origine sperimentale della geometria, in un tempo, nel quale il Kantismo e il puro idealismo trionfavano, nulla pubblicò sulla geometria non euclidea, perchè, come scriveva, temette le strida dei beoti ».*

Furono i competenti, gli esperti a condannare, al loro nascere, le idee, destinate a trionfare più tardi, di Copernico, di Galilei, di Newton, di Einstein.

Un povero illuso era per Lord Rutherford chi credeva di poter utilizzare come fonte di energia la disintegrazione atomica.

Di fronte a nuovi concetti le reazioni sono, spesso, d'ordine più psicologico che logico. Una domanda, che mi è stata diretta più volte, è la seguente : « Nel chiuso della Terra non vi è pericolo di asfissiare ? ». Una simile domanda non mi è stata rivolta solo da persone di media cultura, e, comunque, incompetenti in campo scientifico, ma anche da laureati in materie tecniche e scientifiche, come fu il caso, una volta, di un ingegnere.

Nel vecchio concetto, gli esseri viventi respirano l'aria che avvolge il globo e la cui altezza si calcola in un centinaio di chilometri : è superfluo aggiungere che gli spazi, al di là di tale fascia (*od « oceano aereo », come piace a qualcuno indicarla*)*, appunto perchè* privi di aria *non sono affatto utilizzati dai polmoni del più esigente dei mortali ! Poichè nei pressi della superficie terrestre lo spazio classico e lo spazio non euclideo del mondo endosferico non differiscono sensibilmente, l'aria a disposizione degli esseri animati è per quantità, densità e volume* la stessa *di quella a disposizione dell'umanità supposta situata sulla superficie convessa della Terra. Quindi niente paura ! Nessun pericolo di asfissia. L'eventuale sensazione angosciosa va eliminata con la riflessione e la ragione.*

La Teoria copernicana ha creato nelle menti degli uomini l'idea di una Terra piccola, pari a una trascurabile porzione di polvere di fronte all'immensità dell'Universo. Siffatta idea consegue logicamente dalla struttura stessa del mondo classico. La nuova Teoria considera in altro modo l'Universo : entro la sfera cava il mondo, dal punto di vista di uno spazio concepito come campo universale, è altrettanto immenso. Nè, a ben guardare, si può in alcun caso parlare di una Terra di poco conto, dal momento che l'uomo ancora ne ignora il segreto. Scrive Kahn (45 ; 197) : *« Tutto quello che è stato detto sulle temperature e sullo stato generale dell'interno della Terra è finora* pura congettura. *Anche l'origine del calore è sconosciuta ». Quanto alla superficie della Terra ben sappiamo che si è assai lungi dall'averla esplorata tutta : basti pensare al Matto Grosso. E come può dirsi piccola questa nostra Terra, di cui l'uomo, con i potentissimi mezzi moderni a sua disposizione, non è riuscito ancora a cono-*

scere, almeno, tutta la superficie? La Terra, con una superficie che supera il mezzo miliardo di chilometri quadrati, è, in realtà, sterminata: oltre ai suoi due miliardi e mezzo di esseri umani, vi si trovano miliardi di altri esseri viventi, sia nella flora e fauna marine, che in quelle terrestri, sia nel mondo microscopico che in quello macroscopico. La nuova concezione del mondo considera, da un punto di vista del tutto diverso da quello tradizionale, il concetto di grandezza: la « vuota » estensione cede il posto al campo universale, la cui intensità raggiunge, presso le sorgenti, valori grandissimi. S'introduce, quindi, con il nuovo concetto, un modo nuovo di considerare il piccolo e il grande.

Quanto poi alla « poesia dell'infinito », di cui altri mi hanno accusato di essere un « attentatore », dirò che l'infinito, nel nuovo concetto, in termini non euclidei, permane. Dirò ancora che l'infinito psicologico non ha nulla a che vedere con l'infinito di cui parlano i matematici e i fisici, i quali sanno che l'infinito non è che un limite, e non una grandezza concepibile. Nemmeno concettualmente può ammettersi la possibilità di percorrere l'infinito. L'infinito psicologico, invece, è altra cosa e può essere percorso dalla fantasia in lungo e in largo, senza difficoltà, e a siffatto infinito possono sciogliersi gli inni più ardenti, che esprimano, per diletto e conforto degli uomini, la « poesia dell'infinito ». Si ricorda che, in un banchetto, nel fare un brindisi, il poeta inglese Giovanni Keats si scagliò contro Newton, perchè, con la scoperta della scomposizione della luce, aveva ucciso la « poesia dei colori ».

La poesia, l'alta poesia, sta nel vero, cui, con tenace sforzo e potenza d'ingegno, tende il pensatore. Al vertice, ove fioriscono i più alti pensieri, poeti, scienziati ed artisti confondono le loro ansie in un unico anelito: la poesia della verità.

Scrive Sambursky (80 ; 91) : « *Nella nostra epoca di scienza organizzata, una nuova teoria scientifica viene accettata dagli esperti della materia qualora si accordi con tutti i fatti conosciuti ed apra la strada per la conoscenza di nuovi fatti, anche se essa comporta dei mutamenti nella struttura di un intera filosofia* ».

A proposito delle teorie einsteiniane scrive ancora Planck (73 ; 175) : « *La Teoria della Relatività è stata per un certo tempo sulla bocca di tutti. Se ne è discusso negli ambienti più disparati, perfino nella stampa quotidiana, da competenti e più ancora da incompetenti. Oggi c'è un po' più di calma. Qualcuno potrebbe forse concluderne che la Teoria della Relatività ha ormai esaurito il suo compito nella scienza. Ma, a mio giudizio, è vero proprio il contrario. La Teoria della Relatività si è oggi inserita così solidamente nell'immagine fisica del mondo che non suscita più scal-*

pore, come tutte le cose ovvie, ed infatti, per quanto l'idea della Relatività Speciale e Generale, al suo primo apparire, abbia agito su tutto il mondo fisico in modo nuovo e rivoluzionario, le sue affermazioni e i suoi attacchi non erano diretti, in fondo, contro le grandi leggi della Fisica, ma solo contro certe idee puramente abitudinarie, benchè profondamente radicate ». Considerazioni perfettamente analoghe possono farsi nei riguardi della Teoria Endosferica del Mondo.

Debbò rilevare, tuttavia, che la portata delle nuove idee è assai meno rivoluzionaria per i fisici (ciòè per coloro che hanno una competenza specifica circa i problemi trattati) che per coloro, che tale competenza specifica non hanno, e ciò a prescindere dalla particolare valutazione positiva, negativa o dubbia, che fisici, matematici e filosofi possono dare alle idee qui esposte. Non che io pensi che la portata dei nuovi concetti sia poco notevole, e non solo da un punto di vista strettamente scientifico, ma ho avuto cura di mostrare che non vi è salto alcuno nell'affermazione dei nuovi concetti, non vi è nessuna novità « caduta dal cielo », ma si tratta di una graduale evoluzione di idee, di graduali sviluppi di pensiero condotti con rigore logico e scientifico, nel senso più moderno di queste parole. Le scoperte, le conclusioni cui conducono nuove ricerche sono frutto dell'immane lavoro scientifico secolare. Poincaré scrive in proposito (74, b;29): *« Non bisogna paragonare il cammino della scienza alle trasformazioni di una città, in cui vecchi edifici sono inesorabilmente gettati a terra per far posto alle costruzioni nuove, ma all'evoluzione continua dei tipi zoologici, che si sviluppano incessantemente e finiscono col diventare irriconoscibili agli occhi volgari, sebbene un occhio esercitato vi ritrovi sempre le tracce del lavoro anteriore dei secoli passati ». Sono indotto a paragonare, almeno in parte, il mio lavoro a quello di un raccoglitore di gemme preziose, di splendide pietre, che, con felici accostamenti, a seconda della forma, del colore e della luce, queste gemme e queste pietre componga, ricavandone un armonico quadro e, insieme, una razionale costruzione. Questo libro, infatti, è sorto, in parte, associando e componendo il lavoro, talora sparso, di forti intelletti, di esimii maestri.*

Fonte prima di sapere, nonchè sprone morale al mio lavoro, sono state le opere dei grandi artefici della Scienza dei Cieli: Galilei, Kepler, Newton e Einstein.

Galileo Galilei, fondatore del metodo sperimentale e della scienza moderna, fu accanito propugnatore del Sistema Eliocentrico di Copernico e, a causa di ciò, ebbe a subire da parte della Chiesa di Roma, la condanna al carcere perpetuo, commutata, più tardi, in quella di residenza obbligata.

Johannes Kepler scoprì le tre celebri leggi, che portano il suo nome; ebbe vita piena di sventure e d'indigenza; sepolto nella fossa comune dei poveri, la sua tomba resta ignorata. Egli desiderava che sul suo sepolcro si scrivessero le parole:

Mensus eram Coelos
Nunc Terrae metior umbras
Mens coelestis erat
Corporis umbra jacet.

Isaac Newton fondò la Meccanica Celeste con la sua legge di Gravitazione Universale. Dopo aver conseguito la laurea, tornò alla sua casa a Woolsthorpe, dove trascorse 18 *mesi di intenso lavoro, che possono essere considerati il periodo più fruttuoso di tutta la storia della scienza.*

Sulla sua tomba, nell'Abbazia di Westminster, a Londra, sta scritto:

Sibi gratulentur Mortales
tale tantumque extitisse
Humani Generis Decus

Albert Einstein è il fondatore della Teoria della Relatività Ristretta e Generale: numerose verifiche sperimentali hanno fornito sorprendenti conferme alle sue Teorie. Perseguitato dalla Germania nazi-fascista per ragioni razziali, continuò, esule, negli Stati Uniti, il suo prezioso lavoro nel campo non solo scientifico, ma anche umanistico e sociale.

Concludendo questo mio lavoro, desidero esprimere la speranza di ottenere la serena e obiettiva critica di quei competenti e di quegli studiosi che vorranno scorrere queste pagine. Al fenomeno dello spostamento delle linee spettrali Einstein ha attribuito un valore decisivo per la Teoria della Relatività, dichiarando che, se esso non fosse stato verificato, bisognava abbandonare tutta la Teoria. « Se una sola delle conclusioni della Teoria, scrive egli stesso (30, *d*; 215), *risultasse inesatta, essa dovrebbe essere abbandonata ». Il mio atteggiamento di fronte alla critica della Teoria Endosferica non potrà essere diverso.*

Infine mi domando: potrà questo libro interessare la nuova generazione? Non mi soffermo sui motivi connessi alla crisi intellettuale e morale, che sembra travagliare attualmente, in ispecial modo, parte, almeno, della gioventù, motivi che mi inducono ad un certo scetticismo. Ricordo solo di avere invitato l'anno scorso ad alcune mie conferenze attorno al problema dello spazio e ai concetti cosmogonici i miei allievi di Esercitazioni di Analisi Matematica della Facoltà di Architettura dell'Uni-

versità di Roma: ne sono venuti ben pochi! Eppure il problema dello spazio non può non interessare i futuri architetti.

Nel ringraziare tutti coloro che mi hanno sostenuto moralmente durante la mia non lieve fatica, il primo mio pensiero va al grande Scomparso, Ulisse G. Morrow. Ad Anna, la dolce compagna che mi ha aiutato nel lungo lavoro preparatorio, ordinando il vasto schedario di voci, note e citazioni per materia e per autore, e, poi, copiando il manoscritto e limando, in qualche punto, la sua forma, va la mia affettuosa e commossa riconoscenza. A Ramona Argentina Giovannini, che risiede a New York, e a Franz Ludwig Dittmann, attualmente nel Cile, va pure il mio memore e grato pensiero per la incoraggiante fiducia da loro riposta, per tanti anni, nei miei studi.

Sia questo lavoro degno dell'alto soggetto.

PAOLO EMILIO AMICO-ROXAS

Roma, Aprile 1960.

PREFACE

A new conception of the world? The great successes of the Celestial Mechanics, the very considerable confirmations in the experimental domain of the Newton law appear to the mind of the modern physicist and even more to the man of the street, as a proof of the truth of the classic world conception (the modifications brought by Einstein are quantitatively very slight). Nevertheless in this book a new conception of the world is being shown : the same *facts, the* same *experiences may be interpreted in another way. Concerned, as Einstein stated* (30, *b ;* 102), *with regard to his theories, are " new, original modes of thinking upon experiences and phenomena known since long ". The field conception, definitively introduced in the science in the past century, both in the experimental and theoretical domain, with the famous Maxwell equations, is the fundamental idea of this new Theory. The world is conceived as a field : the ultimate and most imposing developments of the physics let appear the field as the basic and most natural form of the activity of energy. The Universe, this huge energy store in a continuous activity, appears therefore to the modern physicist as a field. All the facts, being explained by the classic Theory, meet a likewise complete explanation in the new world conception, which moreover not only allows to operate calculations and previsions of celestial phenomena with the same exactness, by which they are operated on the ground of the Copernican conception, but replenishes also relevant voids in the traditional world conception.* Much is being talked about the positive sides of the classic conception, little about its defects. *Many are those who scarcely know that a principle like that of the energy preservation is being contravened in a disconcerting manner by the classic Theory, a contravention which not even the Einstein Theory, with the supposal of the elliptical space, as is shown by Armellini* (9, *a*, II, 159 *and b*, 304), *has succeeded to repair. Of the huge quantity of energy spread by the Sun, only about* 20 *milliardth parts are exploited by the planets : the whole remainder is not recovered, but goes completely astray ! Eddington underlines* (20, *a;* 102) *the " strange " fact of the* symmetrical *fall of the*

cosmic rays on the earth surface. The Newton law involves a world of infinite *masses. The cosmic space is uniform* (*such it may* practically *be considered also with the relativistic corrections*)*, the moves therein are rigid : it is still Eddington* (29, *a* ; 131) *together with others, who refuses a space without characteristics* (*bents*)*, stating moreover* (29, *a* ; 72) : " *The* undifferentiated identity *and the nought may not be distinguished in a philosophical way. The physic realities are non-homogeneousnesses, events, changes* ". *The phantastic duration of the light rays of milliards of light-years may not let but perplexed the physicist, who feels compelled to accept it, not as a result from experimental items, but as a consequence of the premises substantiating the classic world conception.*

Armellini underlines (9, *b* ; 3 *and* 203) *two " peculiar " facts : The earth is the densest among the bodies of the solar system and is moreover the* favorite *as a human dwelling place. Now, how the earth, which in the classic conception is " just a planet ", does show such a " privileged " rank? Planck points out* (73 ; 201) *the " peculiar " difference between the behaviour of the electrons, which may circulate only on well determined orbits, which differ between each other in a discreet way, and the behaviour of the planets, for which no orbit appears preferred confronting another one : this contrasts with the upheld analogy between the atom and the solar system. There are still further weak points in the classic Theory ; and scientists like Eddington, Armellini, Planck and others of the same scientific level have repeatedly stated them. A theory, which for accidental facts or insufficiently explained ones, affords an exhaustive and rational explanation, it seems to deserve the consideration for an examination and a comment. The identity between heavy and inert mass, which proved accidental in the classic Theory* (*Newton himself had stressed it*)*, in the relativistic physics instead proves as a fundamental fact, and this caused Einstein to state* (30, *b* ; 46) : " *A yellow novel is judged as of a lower quality if it explains strange facts as accidents ; we find it much more satisfactory if it doesn't keep from a rational line* ". *Facts as the* symmetrical *fall of the cosmic rays on the Earth surface, the peculiar position of the earth, as regards the density, confronting the celestial bodies, the origin of the earth magnetism, the non-uniformity of the cosmic space and the non-rigidness of the moves, the luminousness of the night sky without clouds and without Moon,* descend *from the new Theory, without the need to introduce new, more or less artful, more or less plausible hypotheses, whereas in the classic Theory they prove " strange like accidents ". The new Theory, where the same facts " don't keep from a rational line ", appears more satisfactory.*

The classic Theory involves astonishing facts as, for instance, the quick flight (3 *km/sec.*) *of Antares, which has a diameter of* more than half a milliard of kilometers *and a density* 2000 *times* lower than that of the air, *and as the speeds of lot of thousands km/sec. of millions of " Suns ", which have diameters many thousand times the Earth-Sun distance, and densities of a* 10^{-21} *range* (20 *corpuscles, free atoms and electrons, each cubic centimeter*), *i.e.* densities milliards of milliards times lower than the air density. *These flights of huge bodies with their densities very close by zero and speeds not far from the light speed, mean phenomena which are hardly believed. In the new Theory there are instead very high densities, reduced volumes and speeds referred to local length units : which latter phenomena prove sensibly more likely and reliable.*

A new World Theory implies the examination of manifold problems : which is the first and fundamental one? As soon as we consider that the study of the Universe is substantially grounded on optical factors, in a particular way on the law of the light propagation, we must own that the primary and most important problem to be taken up is that of the space. What is space? Does it exist as such, as the place where the bodies are put, or is it identified with the outer world, with the things, whereof we perceive certain relations, certain properties? And, moreover, the notion of space does it arise as a result after our sensual experience or is it a priori *congenial with our mind? To these problems I have devouted the whole first part of this work, where the space conception is taken up in its development through the foremost thinkers of the antiquity, as Parmenides, Zeno, Democritos, Plato, Aristotle, until Galilei, Newton, Hume, Kant, Leibniz, Lobacevskij, Poincaré, Veronese, Enriques, Einstein, Eddington. I have expounded the reasons why the modern thought refuses the idea of the absolute empty space, and the Kantian genesis of the space idea, upholding instead that the physical space is but the outer world, the objective representation whereof is attained by degrees, through associations and comparisons of the different perceptions, of the different physio-psychological spaces, perceived by the sight, the touch and the muscle sense. After having distinguished between psychological (subjective) space and physical (objective) space, I have examined the reasons, which Veronese insisted upon, owing to which it must be distinguished between physical or concrete space and geometrical or abstract space, between Physics and Geometry. In a careful study I have dwelt on the meaning to be attributed to the " bent " of the (physical) space, dealing moreover with the different physical spaces : atomic space, ordinary or terrestrial space, astronomical space.*

The astronomical space is essentially an optical one, or if preferred an electromagnetical one, since we have partly explored it by radio waves and signals of an electromagnetic nature like the light. Therefore, contrary to the atomic and to the ordinary space, the astronomical one may not easily be objectivated : it is not possible to compare in the latter the tactile with the optical space. There remains but the formulation of hypotheses : since as a hypothesis the straight propagation (in the Euclid meaning) of the light or of the electromagnetic radiations is taken for granted, taken for granted is also, by way of hypothesis, that the astronomical space, supposed as homogeneous, is an Euclidean one. The first part of the book closes with an extensive exposal of the methods for the determination of masses, distances, volumes, densities, temperatures and speeds of the celestial bodies, underlining the fundamental fact that all these methods, these relations, these equations, draw their meanings from the hypothesis on which they are grounded, that the astronomical space be Euclidean (the improvements brought by Einstein, practically, *don't modify this position), or, more exactly, from the hypothesis that the quantities and the variables, existing in these formulae, have a Euclidean meaning.*

Part II is devouted to the Einstein world. After having stressed some weak points of the Newtonian Theory (substantially three : absolute space and absolute time, actions by distance of the gravitation forces, " accidental " identity between inert and heavy mass), Einstein expounds his theory of Particular Relativity, where space and time are no more absolute : absolute is time-space or chronotope. On the wake of masters like Straneo and others, I have cleared up the correct meaning of the Lorentz equations, to which some physicists, among whom Langevin, had attributed fanciful interpretations (as the famous tale of the twins). The other two weak points of the Newtonian Theory are filled up by Einstein with his Theory of General Relativity : the two classic superposed abstractions (the inertia law and the static field of forces) merge in one sole law, the generalized inertia law, which coincides with the gravitation law. The gravitation forces spread out by contact. If on the practical side the General Relativity does not considerably modify the classic Theory, on the theoric side instead the bearing of this conception is enormous. The real Universe, *according to the Einstein Theory,* is not Euclidean, *the propagation of the light is rectilinear in a non-Euclidean sense (the light rays run on geodetics, which, in the Euclidean sense are curvilinear), the speed of light is not constant, the moves of the bodies are not rigid. Einstein's world,* qualitatively, *is profoundly different from the classic one. The space idea, thanks to*

Einstein's Theory, marks a historical turn in its evolutional course : the myth of the Euclidean space falls down.

In the IIIrd part I expound the new world conception, which, qualitatively, does not differ from the Theory of General Relativity. *The new Theory admits a non-Euclidean space by variable bent, admits that the light propagation occurs along non-Euclidean (curvilinear) geodetics, that the light speed is not constant, that the moves of the bodies are not rigid. It is particularly remarkable that the new conception does not involve any essentially new hypothesis with regard to Einstein's Theory. The difference between the two Theories is only of a* quantitative *order. The space bents, negligible in Einstein, are considerable instead in the new Theory; the same thing must be said also as to the non-rigidness of the moves.*

The space considered by the new conception, characterized by the field laws, through the application of the transformation by reciprocal vector rays, changes into the classic Euclidean space. It may not surprise that between the curvilinear field geodetics (run by the light rays), the behaviour whereof is subject to well determinate laws, and the prolongation *of the light rays, as I shall state at once, in the direction in which they enter the eye, exists a mathematically expressable relation. On the other hand, to speak of* prolongation *and to speak of* straight line *or* Euclidean geometry *is exactly the same thing.*

The field has as sources the Sun and the Stars Centre, and is surrounded by the concave Earth surface. The electromagnetic (luminous) waves, which run on curvilinear geodetics, in the proximity of the terrestrial surface run on geodetics of such a slight bent that they appear rectilinear : hence the hypothesis of the rectilinear light propagation. In the depths of the space, instead, the bents are more and more stressed out until becoming infinite. The hypothesis of the rectilinear light propagation, connected with the fact that we mentally extend the light rays reaching our eye (every thing or light source appears to be in the direction in which the light rays, getting out of such thing or light source, enter our eye or a camera), has caused the belief, since millenia, that the endospheric world were exospheric, that the bent space were Euclidean, that the ship, disappearing under the curvilinear tangent *of the concave Earth surface, would disappear under the supposed* rectilinear tangent *of the "convex" Earth surface. The circular transformation, which connects the real endospheric space with the classic hypothesis, involves that every relation, valid in either space, is valid also in the other one. The Newton law maintains, therefore, in the new space, full validity. In a strict way, in the endospheric world all*

phenomena explained by the classic Theory are explained in their turn: the day-night alternation, the seasons, the moon phases the sun and moon eclipses, the star occultations etc. The calculations and previsions of celestial phenomena may be made in the new space with the same exactness as are made by the classic Astronomy. The rockets launched into the space (Explorer, Pioneer, Sputnik, Lunik) don't represent crucial experiments, *such as to discriminate between the two theories and to decide which one is* true : *such experiments meet in both theories with a rational and satisfactory explanation. One same formula, one same relation or equation, gets different meanings according to the meaning which we attribute to the quantities or variables there existing.*

Fresnel's optical Theory was essentially different from Maxwell's ; at any rate both theories satisfied the main purpose of foreseeing optical phenomena. The differential equations, which expressed the two different *theories, were almost* the same : *in them existed an* identical *relation between something and some other thing ; only that this something was named by Fresnel* move, *and by Maxwell instead* electric current (*Poincaré :* 74, *a* ; 155). " *The mathematics, writes Russel, is a science, in which one does not know what be concerned and one does not know whether what is told be true* ".

All relations of the classic Celestial Mechanics, grounded on the Euclidean space, apply in the new cosmogony, provided that to the quantities or variables there existing one attributes the proper meanings of the non-Euclidian space with variable bent of the endospherical world. In the new conception an exhaustive explanation of many obscure points of the classic Theory is afforded : in the endospherical world the law of the energy preservation is respected (there is no dispersion of the energy spread out by the Sun and by the billions of "Star-Suns"), the symmetric *fall of the cosmic rays on the earth surface does no more appear as a " strange " fact (as was called by Eddington), but it appears as a wholly natural fact, since from the same Theory, as we already have stated,* descend *the origin of the earth magnetism, the luminousness of the night sky without clouds and without Moon and the fact that the Earth is* less *dense than all celestial bodies (the Earth is no " planet "). The new world conception, whilst it affords a rational explanation of all facts and phenomena of the classic Theory, explains moreover, rationally, many facts, which in the Copernican Theory appear as accidents or are explained in an unsatisfactory way. The Endospherical Conception is, moreover, a more general Theory than the Theory of General Relativity, since the said conception admits the latter Theory as a " particular case ".*

The Endospherical Theory or Cosmocentric System had in the past several supporters, who called it " Hollow World Theory ". They are among others the Germans Karl Neupert, Johannes Lang and P.A. Müller, and the American Cyrus Reed Teed. I don't dwell, however, on the arguments, whereby the named Authors justify that Theory, since I consider their arguments rather weak, and that chiefly owing to the fact that they are grounded on the Euclidean space hypothesis ; moreover it does not seem to me that the scientific rigour be sufficiently respected. Many years ago, I myself divulged Neupert's Theory, but very soon I gave it definitively up. I esteem as the decidedly foremost upholder among all supporters of the new world conception the American Ulysess G. Morrow ; he died on 11*th September* 1950, *at the age of* 86 (*he was born on the* 26*th October* 1864, *in the borough of Freedom, in the Barren County, Kentucky*) ; *I entertained with him an intense letter exchange since* 1934 *up to his death. This intercourse is assessed in two periods : the first one extends from* 1934 *till* 1939, *whilst I was in Argentine ; the second period extends from* 1940, *the year when I returned to Italy, until* 1950.

Morrow is the author of the drawings contained, with some modification brought by me, in the Tables, except the last one, which is due to the skill of Mr. Fr. Zimmerli, Zurich, undergoing, however, a substantial rectification of mine. Both the 26 *drawings of the* 16 *Tables and the* 27 *drawings inserted in the text were performed by Raimondo Morici, whom I wish to thank for the care and intelligence used in his task.*

Morrow found a method for practically carrying out the inversion proceedings ; he performed some experiments on the Florida beach in the U.S.A., to prove the Earth concavity, but then he got aware of his mistake (as he wrote me in his letter dated 28*th November* 1946), *in the sense that the new world conception is a* new space Theory (*a space where the moves are not rigid*) *: it is exactly, as he himself called it, the* " Field Theory ".

Morrow's work was essentially restrained to the geometrical part and to the description, in the main features, of the universe physics, in the structure of a field. There were, however, in Morrow's work some items for an organic development and for a systematic reelaboration of the whole matter ; this I have achieved in this work. The matter was to solve, moreover, several problems, among which that of the "earth attraction", which, since the field within a hollow sphere is nought, did not persist anymore, and that of the variation of the gravity acceleration, which, in the endospherical world, required a partly different explanation. This and other problems, tied up with the Theory, I believe to have given a satisfactory solution. Further developments I have performed especially as regards the

application of the classic formulae to the new space: I have, for instance, derived the fleeing speed of a body for its getting out of the terrestrial gravity force, from Newton's relation, showing that the validity of that law persists on condition that to the quantities existing in that equation be attributed the values belonging to the non-Euclidean space with variable bent of the endospherical world. A particular care I have given in expounding the evolution of the space conception in the course of the history and in parallel the evolution of the world conception from Newton to Einstein, from Einstein to the Endospherical Theory. Newton's Theory is a particular case of the Restrained Relativity, the Restrained Relativity is a particular case of the General Relativity, the General Relativity is a particular case of the Endospherical Theory.

I think to have given the whole matter an organic structure and an actual rigour which it never had before. I have shown that the new world conception enters spontaneously the scientific field, as a consequence of the ultimate developments of the Physics and of the modern cosmogonic ideas. And if a recognition will be granted to my effort, for a great deal I shall owe it to the advice and encouragement received during many years on the part of Morrow, whom I consider my Master.

I have stated just now how the Endospherical Theory enters the field of science as a new stage, a new advance of the scientific thought about the structure of the Universe. The relations of the new conception with the progress of the modern science are in these pages extensively illustrated. I have quoted many passages of highly deserving and amply recognized Authors as Lobacevskij, Poincaré, Eddington, Einstein, Enriques, Armellini, Castelnuovo, Albergamo, Bridgman, Persico, Finzi, Perucca, Lämmel, Levi-Civita, Planck, Sambursky, Straneo, Veronese and others, besides passages from Newton and Kant. In this regard I would like to remind what Bridgman writes in his preface to his " Logic of Modern Physics " (16 ; 14) : *" If any passage recalls other authors' writings, it is because their ideas have been assimilated by me, forgetting their source ". The same has happened also to me, although I have endeavoured to reproduce, as far as possible, in the same version of such scientific authorities (also the underlinings are those of the authors themselves), statements, experiences and their interpretations (belonging to the universally accepted scientific patrimony) concerning the subjects dealt with by me, and this for two reasons ; in the first place as the bearing of the conclusions of this book is such as to make it convenient that the reader well discern which be the actual nucleus of new thoughts and conceptions, remaining clearly*

advised of the fact that manifold conceptions bound up with the new Theory don't represent any novelty, as they have been elaborated already since long, and are already inserted in the positive cultural patrimony of all nations ; in the second place, in order to value the actual range of the new ideas in their true light.

Statements and passages from Authors have been here and there repeated : concerned are quotations of a basic relevance for the subject here dealt with. I have preferred to repeat me rather than divert the reader obliging him to read again elsewhere that or that passage. Rather often I have dwelt upon developing rather elementary arguments and for many people superfluous analytic passages : in consideration of the rather unusual thesis of this work, I have deemed it advisable to shun as much as possible the reader in some mnemonical effort. Briefly, I have tried to be clear as much as possible, and to make as easy as possible the lecture of this book. There are no foot notes on the pages ; personally I have found them always scarcely comfortable : first of all as they appear in smaller types than those of the text, some time even too small, and therefore scarcely comfortable to be read ; and then, as one thinks often that the contents of these foot notes is not very important ; whereas I don't believe that an accurate book contain, as to the subject dealt with, not important statements, and in this I feel confirmed by the fact that often I have found in the notes of many books some topics and news, which, owing to their importance, had to be put in thick letters in the text.

The quotations are referred to by two numbers within brackets : the first one is the running number, which the quoted Author keeps in the bibliography, followed, some time, by an alphabetic letter when the works of the Author in the bibliography are more than one ; the second number marks the page where the reproduced passage is to be found. In this preface I have already kept at this system.

The lecture of the work requires a little effort as regards the mental attitude of the reader. " One of the most remarkable novelty of the recent Physics, writes Bridgman (16 ; 15) *consists in the change of attitude toward what may be called the interpretative aspect of Physics ". The new world conception requires, exactly, a different mental attitude toward well-known facts and phenomena of the Physics. Planck writes* (73 ; 107) *: " If we have for the first time to deal with any unusual phenomenon, we feel highly astonished ; if we see it for the tenth time, we find it quite natural ; when we see it for the hundredth time, we feel no need anymore to explain it and try maybe to prove its necessity ". The same happens,*

besides for the phenomena, also for the original ideas of the innovators, which ideas, when they are well grounded, at first astonish, then are found natural and, at last, necessary. This has happened for more than one philosophical or scientific revolution. Thus it has happened, among the other cases, for the Copernican Heliocentric System. Lobacevskij's and Bolyai's works at their issue didn't meet the favour which so many centuries of slow and continuous preparation seemed to promise : the history of science teaches us that every radical change in the singular disciplines does not destroy at once the convictions, the premises, on which the thinkers, the scholars, through a long period, built up their doctrines.

" Gauss, writes Veronese (90)*, convinced of the experimental origin of the geometry, in a time when the Kantism and the pure idealism triumphed, didn't publish anything on the Euclidean geometry, since, as he wrote, he feared the shouts of the Beotians ".*

It were the experts who condemned, at the very start, the ideas, destined to triumph later on, of Copernic, Galilei, Newton, Einstein.

Lord Rutherford wrote : " Anybody who was seeking for a source of power in atomic disintegration, was talking moonshine ".

In front of new conceptions the reactions are often more of a psychological then logical order. A question which several times has been put to me is the following one : " In the close of the Earth is there no suffocating danger ? ". A similar question has not been put to me only by people of an average culture, and at any rate unresponsible in the scientific scope, but also by graduates in technical and scientific matters, as was once the case with an Engineer of degree.

In the old conception, the living beings breathe the air which surrounds the globe and the height whereof is calculated in a hundred kilometers : it is useless to add that the spaces, beyond that belt (or " aerial ocean " as somebody likes to call it), exactly for their being airless, *are not utilized at all by the lungs of the most pretending mortal ! Since in the proximities of the Earth surface the classic and the non-Euclidean space of the endospherical world don't considerably differ between each other, the air available for the living beings is, by quantity, density and volume,* the same *as the air available for the men pretended to be put on the convex Earth surface. Therefore, no fear ! No suffocating danger. Any possible feeling anxious must be removed by reflection and reason.*

The Copernican Theory has created in the human minds the idea of a small Earth, like a negligible dust portion confronting the hugeness of the Universe. Such an idea ensues logically from the very structure of the

classic world. The new Theory considers the Universe in another way : within the hollow sphere the world, from the viewpoint of a space conceived as a universal field, is as huge. Nor, thinking over a bit, any irrelevant Earth may be talked about, since the men still ignore her secret. Kahn writes (15 ; 197) : " *All what has been told on the temperatures and on the general state of Earth's interior as yet is* mere conjecture. *Also the origin of the heat is unknown* ". *As to Earth's surface, we are well aware of our being very far from having explored her entirely. It may suffice to think of the Matto Grosso. And how may this our Earth be deemed small, of whom the men, with the mightiest modern means at their disposal, have not yet succeeded in exploring her whole surface at least ? The Earth, with her surface surpassing the half milliard of square kilometers, is really huge : besides her two milliards and a half human beings, there are milliards of other living beings, both in the sea fauna and flora and in the land ones, both in the micro and macroscopical world. The new world conception considers from a viewpoint wholly different from the conventional one the idea of largeness : the " empty " expanse gets replaced by the universal field, the intensity whereof attains, at its sources, very high values. With the new conception a new manner of considering the small and the large is introduced.*

Then, as to the " poetry of the infinite ", whereof others have charged me to be an " attempter ", I shall say that the infinite in the new conception, in non-Euclidean *terms, persists. I shall still say that the psychological infinite has nothing to do with the infinite dealt with by the mathematitians and physicists, who know that the infinite is but a limit, and no conceivable quantity. Not even conceptually the possibility to run through the infinite may be taken for granted. The psychological infinite, instead, is another thing, and may be run by the immagination in every sense, without difficulty, and such infinite may be extolled by the most ardent hymns, expressing, for the men's delight and comfort, the " poetry of the infinite ". It is remembered that in a banquet in toasting, the English poet John Keats attacked Newton, since the latter with the discovery of the decomposition of the light, had destroyed the " poetry of the colours ".*

The poetry, the high poetry, is inspired by the very truth, aimed at, with constant effort and mighty intelligence, by the thinker. At the apex, where the loftiest thoughts flourish, the poets, scientists and artists mingle their aspirations in one sole longing : the poetry of truth.

Sambursky writes (80 ; 91) : " *In our time of organized science, a new scientific theory is accepted by the specific experts when it meets with all known facts and opens the path towards the knowledge of new ones,*

even though it involves any changes in the structure of an entire philosophy ".

Concerning Einstein's Theories Planck still writes (73 ; 175) : " *The Theory of Relativity during some time has been on the lips of all. It has been discussed in the most different circles, even in the daily press, among responsible, and even more, unresponsible people. To-day there is some more quietness. Somebody could perhaps argue that the Theory of Relativity would have exhausted its task in the scientific domain. But, in my judgment, true is exactly the contrary. The Theory of Relativity has nowadays so staunchly entered the physical image of the world that it does no more arouse any clamour, like all obvious things, and in fact, even though the idea of Special and General Relativity, at its first rise, has acted on the whole world of the physics in a new and upsetting way, its statements and attacks did not aim, after all, against the great laws of the physics, but only against certain merely customary, even though deeply rooted ideas ". Perfectly parallel considerations may be made as to the Endospherical Theory of the World.*

I must point out, however, that the bearing of the new ideas is far less revolutionary for the physicists (*namely for those who own a specific competence as to the problems dealth with*) *than for those, who don't own this competence, independently from the particular positive, negative or doubtful valuation, which the physicists, mathematitians and philosophers may give the ideas here expounded. Not that I would think that the bearing of the new ideas be not very considerable, and this not only from a strict scientific viewpoint, but I have cared for showing that there was no leap at all in the statement of the new conception, there is no novelty " fallen from the sky ", but concerned are a gradual evolution of ideas, gradual developments of thought, displayed with logical and scientific rigour, in the up to date meaning of these words. The discoveries, the conclusions attained by new researches are the fruit of the huge scientific labour of the centuries. Poincaré writes in the matter* (74, *b* ; 29) : " *The march of science must not be compared with the transformations of a town, where old buildings are implacably thrown down to give place for the new ones, but with the continuous evolution of the zoological types, which constantly develop and become unrecognizable at the last to the common eyes, although an exercised eye finds there always the vestiges of the labour of the past centuries ". I feel induced to compare, partly at least, my work with that of a collector of precious gems, of magnificent stones, who by lucky approachments, according to the shape, colour and light, would compose these gems and stones, deriving therefrom a harmonic picture and at the same time a*

rational building. This book, in fact, has arosen in part, through the association and compound of the sometimes disconnected works of keen intelligences, of outstanding masters.

The primary source of knowledge, as well as the moral stimulus to my effort, have been the works of the great builders of the Science of the Skies : Galilei, Kepler, Newton and Einstein.

Galileo Galilei, founder of the experimental method and of the modern science, was a keen upholder of Copernic's Heliocentric System and underwent therefore on the part of the Roman Church the doom to lifelong jail, commuted later on to forced stay.

Johannes Kepler discovered the three famous laws bearing his name ; he had a life full with distress and misery ; buried in the common grave of the poor, his tomb remained unknown. He wished that on his tombstone the words were written :

Mensus eram Coelos
Nunc Terrae metior umbras
Mens coelestis erat
Corporis umbra jacet.

Isaac Newton founded the Celestial Mechanics with his law of Universal Gravitation. After having obtained his degree, he returned home to Woolsthorpe, where he spent 18 *months of intense work, which may be considered the most fruitful period of the whole history of science. On his tombstone, in the Westminster Abbey in London is written :*

Sibi gratulentur Mortales
tale tantumque extitisse
Humani Generis Decus.

Albert Einstein is the founder of the Theory of Restrained and General Relativity : many experimental proofs have afforded surprising confirmations to his Theories. Persecuted by the nazi-fascist Germany for racial reasons, he continued, as an exile, in the United States, his precious work in the not only scientific, but also humanistic and social field.

At the end of this my work, I wish to express the hope to get the objective judgment and comment on the part of the responsible scholars who will wish to read these pages. The phenomenon of displacement of the spectre lines Einstein has attributed a determining value for the support of the Relativity Theory, stating that if it would not have been verified, the whole Theory ought to be given up. " If one only of the conclusions of the Theory,

he writes (30, *d* ; 215), *would result inexact, it ought to be given up ". My attitude confronting the criticism on the Endospherical Theory may not be different.*

At last I wonder : May this book be of any interest for the new generations ? I don't dwell on the motives concerning the intellectual and moral crisis, which at present seems to trouble in a special way one part, at least, of the youth, which motives induce me to a certain scepsis. I only remember to have invited last year my disciples of Exercises of Mathematic Analysis in the Faculty of Architecture with the Rome University to some of my lectures on the space problem and the cosmogonic conceptions : there have come very few only ! Whereas the space problem may not but interest the future architects.

In thanking all those who have morally supported me during my not light endeavour I address my first thought to the great Disappeared, Ulisses G. Morrow. To Anna, the sweet mate who has helped me in the long preparatory work, ordering the wide card-index of items, notes and quotations, by matter and author, and, then, copying the manuscript and cleaning, in some points, its form, goes my loving and moved gratitude. To Ramona Argentina Giovannini, who lives in New York, and to Franz Ludwig Dittmann, at present in Chile, goes also my mindful and grateful thought, owing to their encouraging trust put by them, for so many years, in my studies.

Be this work worthy of the high subject.

PAOLO EMILIO AMICO-ROXAS

Rome, Italy, April, 1960.

PARTE I

COS'È LO SPAZIO?

he writes (30, d: 215), would result inexact, it ought to be given up ". My attitude confronting the criticism on the Endospherical Theory may not be different.

At last I wonder: May this book be of any interest for the new generations? I don't dwell on the motives concerning the intellectual and moral crisis, which at present seems to trouble in a special way one part, at least, of the youth, which motives induce me to a certain scepsis. I only remember to have invited last year my disciples of Exercises of Mathematic Analysis in the Faculty of Architecture with the Rome University to some of my lectures on the space problem and the cosmogonic conceptions: there have come very few only! Whereas the space problem may not but interest the future architects.

In thanking all those who have morally supported me during my not light endeavour I address my first thought to the great Disappeared, Ulysses G. Morrow. To Anna, the sister, who has helped me in the long preparatory work, ordering the wide card-index of items, notes and quotations, by matter and author, and, then, copying the manuscript and cleaning, in some points, its form, goes my particular gratitude. To Ramona Argentina Giovannini, who lives in New York, and to Franz Ludwig Dittmann, at present in Chile, goes also my mindful and grateful thought, owing to their encouraging trust put by them, for so many years, in my studies.

Be this work worthy of the high subject.

PAOLO EMILIO AMICO-ROXAS

Rome, Italy, April, 1960.

CAPITOLO I.

Il concetto di spazio dei maggiori pensatori dall' antichità fino ai nostri giorni.

Problema ontologico e problema psicologico dello spazio – Parmenide – Zenone – Leucippo – Platone – Aristotele – Plotino – Galilei – Descartes – Berkeley – Newton – Leibniz – Clarke – Hume – Kant – Hegel – Lobacevskij – Helmholtz – Ardigò – Poincaré – Veronese – Stuart-Mill – Cayley – Carlson – Enriques – Einstein – Eddington.

Lo spazio implica essenzialmente due problemi, uno di natura ontologica e l'altro di natura psicologica. Il problema di natura ontologica è il seguente : lo spazio esiste in sè, come luogo ove sono collocati i corpi, ma indipendentemente da questi, o, invece, s'identifica con il mondo esterno, con le cose, di cui percepiamo certe relazioni, certe proprietà ? In generale la filosofia antica risolve la questione nel primo modo, la filosofia critica moderna nel secondo. Il problema di natura psicologica è, invece, questo : la nozione di spazio sorge come risultato della nostra esperienza sensibile o si trova insita *a priori* nella nostra mente ?

Parmenide (VI sec. a. C.) identifica *lo spazio* (l'ente) con *la materia*, qualitativamente indifferenziata, che lo occupa, non lasciando posto a vuoti ; il vuoto è concepito come « non ente ». Sorge da questa tesi una duplice difficoltà : non può assegnarsi una ragion sufficiente al processo cosmico in siffatta materia compatta ed omogenea ; inoltre il moto dei corpi, identificandosi lo spazio con la materia, non può risultare che relativo, concetto questo che ci perviene specialmente da Zenone, scolaro di Parmenide, con la sua « negazione del moto ».

Leucippo (V sec. a. C.) e Democrito di Abdera (V sec. a. C.) sostituiscono alla materia compatta un aggregato di *atomi*, anch'essi indifferenziati. Esiste uno spazio infinito, parte vuoto e parte pieno di atomi. Cadono, quindi, le difficoltà cui danno luogo le idee di Parmenide. Lo *spazio vuoto* (il non-ente) o spazio puro, per essi, ha una sua *esistenza*

in sè, indipendente dai corpi ; esso costituisce il sistema di riferimento del moto (assoluto) dei corpi.

Platone (IV sec. a. C.) considera lo spazio vuoto come la concausa del non-essere, che sta accanto al mondo dell'essere o della causa, al mondo delle idee. Ammettendo il correlativo oggettivo di ogni idea, Platone ammette anche la realtà del nulla (non-ente = materia) come correlativo dell'idea del nulla (78 ; 782). Lo spazio non è che il nulla = materia, da cui, in virtù delle idee, prende forma il mondo dei fenomeni.

Aristotele (IV sec. a. C.) si oppone all'identificazione platonica dello spazio con la materia, rilevando che la materia e la forma sono inseparabili dalle cose, mentre lo spazio è separabile e le contiene. Lo spazio è, tuttavia, per Aristotele, qualcosa di reale, di obbiettivo, di fisico (78 ; 1122). Egli nega il vuoto : come concilia però tale negazione con il fatto che esso non permetterebbe alcuna azione fisica ? Tutti i corpi *tendono* al loro *luogo naturale :* in *potenza* ogni grave starebbe in basso ; se non vi si trova gli è perchè ne è comunque impedito da un ostacolo e basta che questo sia rimosso perchè *tenda* a ritornarvi ; così la sua *forma* o qualità essenziale (l'appartenenza a un dato luogo) passa dalla potenza all'*atto*. I corpi leggeri (vapori, fiamme) tendono a salire, quelli pesanti (pietre) tendono a cadere. È questa, per Aristotele, la ragione o il perchè del moto (32, *g* ; 238).

In polemica con gli atomisti, i quali sostenevano che senza il vuoto non fosse possibile il moto (o, meglio, non potesse definirsi ciò che noi diciamo moto assoluto), asseriva Aristotele che, al contrario, il vuoto lo renderebbe inconcepibile. Così argomentava, infatti, lo Stagirita nella sua *Fisica* (80 ; 122) : « Come può esistere un moto naturale, se non vi è differenza alcuna per tutto il vuoto o l'infinito ? Infatti, nell'infinito, in quanto tale, l'ingiù non differisce dall'insù ; non esiste, infatti, alcuna differenza in ciò che è nulla, e quindi nessuna nel vuoto ; ora il moto naturale comporta delle differenze, così come le cose esistenti per natura debbono essere differenziate. Una delle due, dunque : o nessuna cosa possiede un moto naturale, oppure il vuoto non esiste ». In altri termini, Aristotele diceva : perchè il moto di un corpo, nel vuoto, dovrebbe avvenire in una direzione piuttosto che in un'altra ? Non potendo muoversi in versi differenti ed opposti, necessariamente sta fermo. Siffatto argomento richiama tuttavia quello di simmetria addotto per la stabilità della Terra da Anassimandro e che lo Stagirita aveva preso a dileggio !

Altro argomento contro il vuoto è tratto da Aristotele dall'assurda conclusione che la velocità di caduta nel vuoto dovrebbe essere infinita. Altri argomenti ancora sollevava Aristotele contro gli atomisti, su cui sorvoliamo, ma erano le discussioni teoriche (con un evidente abuso del principio di ragion sufficiente) e non già gli argomenti empirici a far decidere quali principî adottare (dato il carattere estremamente imperfetto della sperimentazione sistematica nel mondo antico).

Per Plotino (III sec. d. C.) lo spazio vuoto è, come per Platone, il non-essere, la materia che rende possibile l'esistenza dei corpi, pur non essendo esso stesso un corpo e non essendo determinato da alcuna proprietà.

Galilei (1564-1642), pur non accettando apertamente l'atomismo di Democrito, sembra non rifiutare uno *spazio vuoto ;* egli infatti accoglie il « moto assoluto », che, nel concetto del filosofo di Abdera, non è che il « moto rispetto al vuoto ».

Descartes (1596-1650) ragiona in qualche modo così (30, *d* ; 331) : lo spazio è identico all'estensione, ma l'estensione è legata ai corpi ; ne risulta perciò che non vi è spazio senza corpi e quindi nessuno spazio vuoto. Con l'idea d'una *materia estesa,* priva di qualità, riempiente *lo spazio,* Descartes non fa che riprendere la tesi d'Elea e ne trae similmente la conseguenza della relatività del moto (32, *a* ; 430).

L'elaborazione del concetto della materia presso i Greci aveva portato a distinguere due ordini di proprietà, che Locke (1632-1704) denominò poi « qualità primarie e secondarie » : le qualità primarie (estensione, impenetrabilità, ecc.) sono attribuite alle cose in se stesse, riflettendosi nelle proprietà della *materia estesa ;* invece le qualità secondarie (colore, odore, sapore, ecc.) sono considerate come mere apparenze sensibili, relative al soggetto che le percepisce. Per Berkeley (1684-1753) nemmeno le proprietà primarie, specialmente le estensive, sono indipendenti dal soggetto : esse non sono che *sensazioni tattili e visive convenientemente associate.* Tutta la realtà non è che possibilità di sensazioni : *esse est percipi.* Agli assertori di una rappresentazione pura, cioè spoglia di ogni concreta qualità empirica, Berkeley rispondeva (2, *c* ; 25) : « Se altri mai abbia questa mirabile capacità, potrà darne conto meglio a chiunque ; in quanto a me, so di non averla certo ». Il moto assoluto non ha significato : se tutti i corpi scomparissero, salvo uno, sarebbe impossibile riconoscerne qualsiasi movimento ; pertanto il moto è essenzialmente relativo. Così si esprimeva Berkeley (76 ; 26) : « ... della esistenza fuori della mente dello spazio assoluto si può dimostrare l'im-

possibilità in modo evidentissimo... Di uno spazio puro, che non contenga nessun corpo, non possiamo neppure formarci un'idea».

Newton (1642-1727) afferma esplicitamente le idee di Democrito e di Galilei: lo *spazio assoluto*, che egli considera «*sensorium Dei*», è reale, è un essere in sè, indipendente dai corpi, che vi si muovono. Il moto dei corpi, riferito allo spazio assoluto, è ugualmente assoluto. Galilei e Newton, cercando di soddisfare le esigenze della meccanica, trascurarono il problema filosofico dello spazio, che sarà poi oggetto della riflessione di Leibniz (1646-1716). Polemizzando con il newtoniano Clarke (1675-1725), nella seconda replica a questi, Leibniz scriveva: «Non vi è spazio, cioè *lo spazio non è qualcosa di definito in sè*, ma ha soltanto un senso relativo ai corpi come ordine delle coesistenze, delle cose esistenti». E poichè Clarke obiettava che, se così fosse, un movimento dell'universo in linea retta non farebbe uscire i corpi dal luogo che occupano, Leibniz (nella lettera seguente) spiegava che, difatti, un movimento in linea retta comunicato a tutti i corpi non ha alcun senso e, nella quinta lettera, affermava che il movimento dei corpi non può avere altro significato che quello di un cambiamento osservabile dei loro rapporti; ed anche che, se non vi è cambiamento osservabile, non vi è movimento (32, *a*; 430).

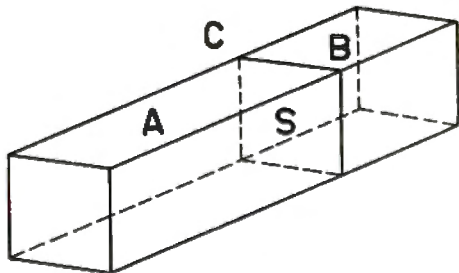
Per Hume (1711-1776) l'idea di spazio e di esteso non è se non l'idea di punti visibili o tangibili, distribuiti in un certo ordine, ottenuta mediante sensazioni tattili e visive; siffatta idea, in quanto tale, esclude la concepibilità di uno spazio vuoto.

Vediamo, così, come i filosofi vanno ponendosi, accanto al problema ontologico dello spazio, quello psicologico; sorgono due dottrine, quella *empirica* o *genetica* e quella *nativista*. Secondo la prima, la nozione di spazio sorge come prodotto della nostra esperienza sensibile; in base alla dottrina nativista, invece, siffatta nozione si trova insita *a priori* nel nostro spirito. Secondo la dottrina *empirica* o *genetica* l'idea di spazio sorge dalla percezione di distanza (profondità) e di estensione superficiale (larghezza e lunghezza): la prima è data specialmente da una associazione tra la sensazione della vista, del tatto e del senso muscolare, la seconda dalle sensazioni tattili cui si associa la rappresentazione visiva della parte toccata. L'idea di spazio così ottenuta costituisce lo spazio psicologico, relativo all'osservatore, le cui parti non sono mai completamente continue ed omogenee. Secondo la dottrina *nativista* lo spazio è, invece, un dato assolutamente *a priori*, che troviamo nel nostro spirito e applichiamo alle cose; sono sue proprietà l'omogeneità e la divisibilità illimitata.

La dottrina nativista ha come principale assertore il filosofo Emanuele Kant (1724-1804) di cui particolarmente ci occuperemo nel prossimo capitolo.

Hegel (1770-1831) considera lo spazio come mera forma, come astrazione dell'esteriorità immediata; l'idea, come natura, comincia appunto a porsi come l'essere che è esteriormente, ed è altro. In particolare egli scrive (40, *a*; 213): « La prima o immediata determinazione della natura è l'*universalità astratta della sua esteriorità*, la cui indifferenza, priva di mediazione, è lo spazio. Lo spazio è la giustapposizione del tutto ideale, perchè è l'essere fuori di sè stesso, e semplicemente *continuo*, perchè questa esteriorità è ancora del tutto astratta e non ha in sè alcuna differenza determinata ». Engels scrive (31, 139): « La *vera infinità* fu già posta giustamente da Hegel nello spazio e nel tempo *riempiti* nel processo della natura e nella storia... L'infinita varietà di natura e storia contiene in sè l'infinità dello spazio e del tempo. *La cattiva infinità* (va considerata) solo come momento superato, essenziale sì, ma non predominante ».

Lobacevskij (1793-1856) asserisce (52; 61): « Nella natura noi abbiamo cognizione, propriamente, soltanto del movimento, senza il quale le impressioni sensoriali sono impossibili. Pertanto tutti i rimanenti concetti, per esempio quelli geometrici, sono creazioni artificiali della nostra mente, tratte dalle proprietà del movimento; ecco perchè lo spazio, in sè, separatamente (preso), per noi non esiste ». « *Il contatto* (52; 73) costituisce l'attributo caratteristico dei corpi; ad esso debbono questi il nome di *corpi geometrici*, non appena noi teniamo fissa l'attenzione su questa loro proprietà e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano esse essenziali o accidentali... Nella nostra mente noi colleghiamo il concetto di contatto soltanto con i corpi, quando parliamo della loro composizione o scomposizione in parti. Questo semplice concetto, che abbiamo ricevuto direttamente dalla natura attraverso i sensi, non deriva da altri concetti, e non soggiace perciò ad ulteriori spiegazioni.

Due corpi *A* e *B*, che si toccano tra di loro, formano un unico corpo geometrico *C*, nel quale ciascuna delle parti componenti appare a sè stante, senza confondersi nel tutto *C*. Viceversa ogni corpo *C* viene scomposto da una qualsivoglia *sezione S* in due

parti A e B. Intendiamo qui con la parola sezione non già un qualche attributo del corpo, ma ancora una volta un contatto, in quanto esprimiamo in questo caso la scomposizione del corpo in due parti che si toccano. Chiameremo... lati della sezione S nel corpo C le due parti A e B. In questo modo noi possiamo concepire tutti i corpi della natura come parti di un unico corpo globale, che noi chiamiamo *spazio* ».

Helmholtz (1821-1894) riconduce la rappresentazione dello spazio alla organizzazione psico-fisiologica ; ma, oltre allo spazio apparente o soggettivo, egli dice, dobbiamo ammettere uno spazio reale « perchè nella realtà devono esistere dei rapporti di qualche genere o dei complessi di essi, tali da determinare il luogo dello spazio nel quale un oggetto appare » (78 ; 1125).

Per Ardigò (1828-1920) lo spazio non è che l'astratto del rapporto di coesistenza, ossia dell'ordine col quale si presentano associati insieme i sensibili nella percezione dei corpi. Si tratta dunque di un concetto empirico, alla cui formazione concorrono insieme sensazioni visive, tattili e muscolari e che non richiede quindi, per essere spiegato, il concorso della facoltà dell'intelletto o del soprasensibile.

Poincaré (1854-1912), scrive (74, *a* ; 9) : « Un altro quadro da noi imposto al mondo è lo spazio. Donde derivano i primi principî della geometria ? Ci sono imposti dalla logica ? Lobacevskij ha mostrato che no, creando le geometrie non euclidee. Lo spazio ci è rivelato dai sensi ? Nemmeno questo è vero, poichè lo spazio mostratoci dai nostri sensi differisce assolutamente dallo spazio mostratoci dal geometra. La geometria deriva dall'esperienza ? Una dimostrazione approfondita ci mostrerà di no. Concluderemo, dunque, che questi principî sono convenzioni ; ma tali convenzioni non sono arbitrarie, e, trasportati in un altro mondo (che chiamiamo il *mondo non euclideo* e che cerco di immaginare), saremmo indotti ad adottarne altre ». Per Poincaré lo spazio non ha quindi realtà oggettiva, ma si risolve in un insieme di relazioni create da noi allo scopo di orientarci nell'azione. « Le esperienze, dice ancora Poincaré (74, *a* ; 85), non ci fanno conoscere se non i rapporti dei corpi tra di loro ; nessuna di esse verte, o può vertere, sui rapporti dei corpi con lo spazio, e sui mutui rapporti delle diverse parti dello spazio ».

Torneremo estesamente sui concetti di Poincaré attorno allo spazio rappresentativo e a quello geometrico.

Veronese (1854-1917) afferma (90) che « è necessario distinguere lo *spazio fisico* dallo *spazio intuitivo* e questo dallo *spazio geometrico ;*

forme codeste dello spazio non bene distinte nemmeno da grandi matematici, come dall'Helmholtz, e ancora dal Poincaré e da altri. Lo *spazio fisico* è il mondo esteriore. La nostra *intuizione spaziale* non è una forma *a priori* trascendentale del nostro spirito, bensì è prodotta dall'osservazione combinata con l'astrazione. Noi ci assicuriamo della presenza degli oggetti esterni per mezzo dei sensi, e delle qualità di sensazioni, che in noi producono, tratteniamo coll'astrazione soltanto quella di estensione, per avere le prime forme geometriche. La intuizione spaziale... è il prodotto di una lunga esperienza, e se l'adoperiamo senza riflettere, non significa che sia una forma *a priori* dello spirito; come non è tale il nostro linguaggio per il fatto che da adulti comprendiamo subito il significato dei vocaboli, anche se non sappiamo indicare su quali esempi della nostra esperienza li abbiamo appresi fin da bambini. Ma per quanto perfetta sia la nostra intuizione, non intuiamo mai la retta illimitata, bensì la retta sotto forma di oggetto sensibile, sia pure idealizzata dall'astrazione... Lo *spazio geometrico* è quella parte dell'estensione pura, nella quale è rappresentato lo spazio fisico e intuitivo... ; mentre lo spazio fisico e quello intuitivo non possono essere definiti, può invece essere definito lo spazio geometrico. La geometria ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'intuizione di essi trae le sue prime verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi... L'affermazione dello Stuart-Mill, che la retta del matematico non esiste nella natura, e l'osservazione contraria del Cayley, che questo non potremmo affermare se non avessimo il concetto della retta, trovano la loro piena giustificazione nella distinzione che si deve fare dello spazio fisico e intuitivo da quello geometrico, e in questa distinzione esse conciliano la loro apparente contraddizione». In altre parole, Stuart-Mill, asserendo che la retta geometrica non esiste in natura, dimenticava che siffatta linea retta è una pura astrazione, suggerita da grossolani esempi offerti dalla natura, e pertanto era ovviamente vano andare a vedere se in natura tale linea esistesse! Asserendo Cayley che non potevasi affermare quanto Stuart-Mill diceva se non avessimo già il concetto di retta, anch'egli dimenticava che l'idea di linea retta non preesiste nella nostra mente, ma viene da questa concepita per astrazione, suggerita dall'osservazione di oggetti o fenomeni (moti) reali.

« Non si può ricondurre, dice ancora Veronese, tutta la geometria al puro empirismo, riguardando cioè quali oggetti di essa i corpi dello spazio fisico con le loro imperfezioni, se deve essere una scienza dedut-

tiva, e se in essa la legge di astrazione e quella dell'illimitato, che sono necessità della nostra mente, non hanno il loro pieno svolgimento ». Queste notevolissime osservazioni di Veronese terremo presenti nelle nostre conclusioni.

Carlson afferma (19 ; 233/4) che « lo spazio newtoniano e kantiano non ha rispondenza nel mondo fisico... Lo spazio assolutamente vuoto... non esiste in natura e quindi per la fisica manca di qualsiasi interesse e di qualsiasi realtà. Il nostro spazio, lo spazio cosmico, esiste soltanto in quanto connesso con la possibilità di contenere dei campi elettrici e magnetici ».

Enriques (1871-1946) considera (32, *b* ; 152/3) « una sfera capace di divenire sempre più grande. Si dice che quando essa sia *divenuta infinita* avrà riempito tutto lo spazio. Non fa meraviglia che codesto procedimento trascendente conduca ad attribuire alla parola " spazio " un senso affatto illusorio ! Invero, poichè la nozione di una sfera implica un modo di distinguere le sensazioni riferentisi al di dentro e al di fuori di essa, una sfera infinita, non corrispondendo ad alcuna separazione di tal genere, non ha più alcun significato reale. Ed ecco come lo spazio, definito in tal modo, resta un nome vano senza soggetto. La stessa analisi svolta mette in luce che, all'infuori del senso trascendentale della parola, resta un significato fisico effettivo ai *rapporti spaziali o di posizione dei corpi*, il cui insieme può ancora essere denotato con la parola " spazio ", positivamente presa ». E ancora (32, *b* ; 180) : « Poichè la constatazione di un punto, come fatto bruto, dipende dalla posizione dell'osservatore, e, al variare di questa, i rapporti fra i punti appariscono al soggetto come diversi, ne consegue che l'insieme dei punti, così intesi, costituisce lo *spazio fisiologico* relativo all'osservatore stesso, e differente dallo *spazio geometrico*. Altri autori, come Poincaré, hanno fermato la loro attenzione su questo, che lo spazio fisiologico, visivo o tattile o muscolare, non possiede i caratteri di omogeneità e di isotropia, che concediamo allo spazio geometrico ».

Einstein (1879-1955) scrive (30, *d* ; 257 e 30, *e* ; 127) : « Il concetto di spazio presuppone il concetto di corpo solido. La corrispondenza tra certe impressioni tattili e visive, la possibilità di seguirle nel tempo e la ripetizione delle sensazioni (tatto, vista) formano talune delle caratteristiche dell'idea di spazio. Due corpi solidi possono toccarsi fra di loro o essere separati. In quest'ultimo caso è possibile inserire un terzo corpo, senza spostare i due precedenti. Nel primo caso però ciò non è possibile. L'intervallo tra due corpi è indipendente dalla scelta speciale

dei corpi destinati a riempirlo: quest'idea d'intervallo rappresenta il punto di partenza del concetto totale di spazio. Lo sviluppo del concetto di spazio, considerato dal punto di vista dell'esperienza dei sensi, sembra rispondere al seguente schema: corpo solido o oggetto corporeo (la idea del quale non suppone affatto la relazione di spazio e di tempo) — relazione di posizione di oggetti corporei (possono toccarsi o essere separati) — intervallo (indipendente dalla scelta specifica del corpo destinato a riempirlo: il punto di partenza dell'idea di spazio è siffatta idea d'intervallo) — spazio». Circa il modo con cui da uno spazio soggettivo si arriva a concepire uno spazio oggettivo, così si esprime Einstein (30, *d*; 268/9): « Il primo gradino della costituzione di un " mondo esterno reale " è la formazione del concetto di oggetti corporei. Dalle esperienze sensibili assumiamo taluni complessi di impressioni sensibili: connettiamo ad esse il concetto di oggetto corporeo. Dal punto di vista logico, questo concetto non è identico alla totalità delle impressioni sensibili, ma è una libera creazione della mente umana. Il secondo gradino consiste nell'attribuire al concetto di oggetto corporeo un significato in grande misura indipendente dalle impressioni sensibili che originariamente lo hanno fatto sorgere. In questo consiste l'attribuire ad un oggetto corporeo una esistenza reale». E ancora (30, *d*; 273): « Un contatto permanente di due corpi in tre o più punti significa che essi sono uniti in un corpo composto, praticamente rigido. Si può dire che il secondo corpo forma una (quasi-rigida) prosecuzione del primo corpo e può, a sua volta, esser continuato quasi-rigidamente. La possibilità della continuazione quasi-rigida di un corpo è illimitata. La totalità di tutte le continuazioni quasi-rigide concepibili in un corpo *B* è l'infinito " spazio ", che esso determina. Il fatto che ogni oggetto fisico, situato in una arbitraria posizione, possa essere posto in contatto con la continuazione quasi-rigida di un corpo dato *B* (corpo di riferimento), è la base empirica del nostro concetto di spazio». In base alla Relatività Generale di Einstein, il concetto di spazio, staccato da ogni contenuto fisico, non esiste (30, *d*; 320). Einstein poi afferma esplicitamente (30, *a*; 12): « Mi sembra che Poincaré abbia chiaramente individuato la verità (sui concetti e giudizi di spazio) nello studio da lui fatto nel libro " La Scienza e l'Ipotesi " ». Circa ancora lo « spazio vuoto », Einstein, riferendosi a Cartesio, scrive (30, *d*; 345): « Non può esservi qualcosa che sia uno spazio vuoto, cioè uno spazio senza campo. Così Descartes non era molto lontano dalla verità quando pensava che si dovesse escludere la esistenza di uno spazio vuoto. Il nocciolo centrale dell'idea

di Descartes acquista quindi maggiore esattezza se viene enunciato così: non esiste nessuno spazio "vuoto di campo"». E ancora (30, *d*; 332): « Ripugnava a Descartes considerare lo spazio come indipendente dagli oggetti materiali, una cosa, cioè, che potesse esistere senza la materia ». Ora vi è un legame di equivalenza fra materia, massa, energia, campo. Scrive infatti Einstein (30, *b*; 252): « Si ha materia ove la concentrazione di energia è grande; si ha campo ove la concentrazione di energia è debole ». Non vi è quindi contrasto essenziale, per quanto riguarda lo "spazio vuoto", fra il pensiero di Descartes e quello di Einstein.

Eddington rileva (29, *a*; 131/2) che « il fisico deve *definire* lo spazio come qualcosa che sia caratterizzata in ogni punto da una grandezza intrinseca, che può essere usata come base per la misura delle dimensioni degli oggetti ivi collocati. Non si pone il problema se l'unità di comparazione per la misura di lunghezze e distanze sia una grandezza intrinseca allo spazio o a qualche altra qualità fisica dell'Universo o sia un termine di paragone assoluto al di fuori dell'Universo. Perchè, qualunque cosa incarni, questa unità di comparazione è "*ipso facto*" lo spazio della fisica. Lo spazio fisico non può quindi esser privo di caratteristiche ». Su queste e su altre considerazioni di Eddington torneremo più avanti. Qui rileviamo solo che lo "spazio vuoto" è necessariamente privo di caratteristiche: Eddington decisamente si oppone a tale concezione.

Bridgman (16) si sofferma a considerare i diversi spazi fisiologici, specialmente quello tattile e quello ottico, rilevando che non sempre viene distinto lo spazio fisico (obiettivo) da quello fisiologico (soggettivo).

Come abbiamo visto, sia nell'antichità che nei tempi più vicini a noi, vi è qualche contrasto, a volte profondo, circa il problema dello spazio nel suo duplice aspetto, ontologico e psicologico. Esiste lo spazio vuoto, lo spazio in sè, che contiene le cose, ma da queste indipendente, ovvero lo spazio s'identifica con la materia, con i corpi, risultando senza senso le parole « spazio vuoto »? Leucippo, Democrito, Galilei, Newton affermarono l'esistenza dello spazio vuoto, mentre si schierarono contro siffatta concezione Parmenide, Zenone, Aristotele, Descartes, Berkeley, Hume, Leibniz, Lobacevskij, Ardigò, Poincaré, Veronese, Carlson, Enriques, Einstein, Eddington.

Quanto all'acquisto psicologico del concetto di spazio, se esso sorga come risultato delle nostre esperienze sensibili (dottrina empirica o genetica) oppure si trovi insito *a priori* nel nostro spirito (dottrina nati-

vista), vediamo Emanuele Kant propugnare la dottrina nativista, e Hume, Helmholtz, Poincaré, Enriques, Einstein affermare la dottrina empirica.

Esamineremo attentamente le ragioni per le quali il pensiero moderno rifiuta il concetto dello spazio vuoto assoluto e la genesi kantiana dell'idea di spazio, affermando invece che lo spazio, lo spazio fisico, non è che il mondo esterno, alla cui rappresentazione obiettiva si giunge per gradi, attraverso l'acquisto psicologico del concetto di spazio, acquisto che si realizza per mezzo dei sensi (vista, tatto, senso muscolare) e si fonda, quindi, sull'esperienza. Preciseremo inoltre cosa debba intendersi per spazio fisico, spazio fisio-psicologico e spazio geometrico, che, come affermava Veronese, debbono essere ben distinti.

CAPITOLO II.

Il concetto di spazio si fonda sull'esperienza. Kant e la critica moderna.

Intuizione «pura» e concetto dell'«a priori» di Kant – Giudizi analitici e giudizi sintetici – Lo spazio reale, per Kant, è necessariamente euclideo – Polemica antikantiana dei fondatori delle geometrie non euclidee – Il vero punto debole di Kant – Trapasso dall'esperienza all'astrazione matematica.

Emanuele Kant affermava la subiettività dello spazio. Nel chiedersi cosa fosse lo spazio, egli indagò come a tale concetto si pervenisse e concluse affermando che lo spazio non era, come scriveva Leibniz, l'ordine delle cose esistenti, bensì l'ordine della sensibilità esterna, un ordine dato *a priori* dalla mente, che accoglie e inquadra i dati sensibili. Una insufficiente distinzione fra acquisto del concetto di spazio, idea di spazio e geometria o spazio geometrico conduceva la dottrina kantiana ad affermare il carattere necessario degli assiomi della geometria euclidea. Ancora: detta insufficiente distinzione schierava contro la dottrina kantiana i fondatori delle geometrie non euclidee. Cercheremo di precisare i caratteri e gli errori di siffatta polemica e di esporre la vera natura del grave problema.

Cosa diceva Kant?

« Se in qualunque modo e con qualunque mezzo, scriveva (46 ; 64 e segg.), una conoscenza può sempre riferirsi ad oggetti, quella tuttavia, per la quale tale riferimento avviene immediatamente, e che ogni pensiero ha di mira come mezzo, è l'*intuizione* ».

« L'azione di un oggetto sulla capacità rappresentativa (*sensibilità*) in quanto noi ne siamo affetti, è *sensazione*. Quella intuizione, che si riferisce ad un oggetto mediante sensazione, si chiama *empirica* ».

« Tutte le rappresentazioni nelle quali non è mescolato nulla di ciò che appartiene alla sensazione, io le chiamo *pure*. Quindi la forma pura delle intuizioni sensibili, in generale, deve *a priori* trovarsi nello spirito. Questa forma pura della sensibilità si chiamerà essa stessa *intuizione*

pura. Così, quando dalla rappresentazione di un corpo io separo ciò che ne pensa l'intelletto, come sostanza, forza, divisibilità e così via, e a un tempo ciò che appartiene alla sensazione, come impenetrabilità, durezza, colore e così via, mi resta tuttavia qualche cosa di questa intuizione empirica, cioè estensione e forma; e queste appartengono alla intuizione pura, che esiste *a priori* nello spirito, anche senza un reale oggetto dei sensi, o sensazione, quasi semplice forma della sensibilità».

« Isoleremo dapprima la sensibilità, separandone tutto ciò che vi aggiunge coi suoi concetti l'intelletto, in modo che non ci resti null'altro che l'intuizione empirica. In secondo luogo separeremo ancora ciò che appartiene alla sensazione, sicchè non ci resti altro che la intuizione pura e la semplice forma dei fenomeni, ossia l'unica cosa che la sensibilità ci possa dare *a priori*. In questa ricerca si troverà che si danno due forme pure dell'intuizione sensibile, come princìpi *a priori* della conoscenza, cioè spazio e tempo ».

« Mediante il senso esterno (una delle proprietà del nostro spirito) noi ci rappresentiamo gli oggetti come fuori di noi e tutti insieme nello spazio ».

Il tempo, per Kant, è la forma *a priori* di tutti i fenomeni del senso interno, « mediante il quale lo spirito intuisce sè stesso ».

« Lo spazio è una rappresentazione *necessaria a priori*, la quale serve di fondamento a tutte le intuizioni esterne. L'idea che non vi sia spazio non è possibile punto, sebbene si possa benissimo pensare che in esso non vi sia nessun oggetto ». In altre parole, Kant dice che, sopprimendo dalla nostra rappresentazione tutti gli oggetti, la strada, la casa, l'aria stessa, qualcosa resta che invano cercheremo di eliminare, ed è l'estensione, lo spazio puro. Questo qualcosa di ineliminabile esiste nello spirito prima ancora di ogni esperienza. Questo elemento universale e necessario, o *forma* della conoscenza è, per Kant, distinto dall'*innatismo*, platonico e cartesiano: la forma non è un'idea innata, per sè passiva, ma un'*attività o funzione* dello spirito conoscente.

Kant continua: « Non ci si può rappresentare se non uno spazio unico ». « Una intuizione *a priori* (non empirica) sta a base di tutti i concetti che abbiamo dello spazio. Così anche tutti i princìpi geometrici, per esempio quello per cui in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo, non vengono ricavati con certezza apodittica dai concetti generali di linea e di triangolo, bensì dalla intuizione e *a priori*.

« La rappresentazione originaria dello spazio è una *intuizione a priori* e non un *concetto* ».

Per Kant inoltre i giudizi sono *analitici* e *sintetici*.

« In tutti i giudizi (46, *a* ; 46), nei quali è pensato il rapporto di un oggetto con un predicato, codesto rapporto è possibile in due modi. O il predicato *B* appartiene al soggetto *A* come qualcosa di contenuto (implicitamente) in questo concetto *A* (es.: tutti i corpi sono estesi) ; o *B* resta intieramente al di fuori del concetto *A*, sebbene si trovi in connessione col medesimo (es. : tutti i corpi sono pesanti). Nel primo caso io chiamo il giudizio *analitico*, nel secondo *sintetico* ». Il predicato, nei giudizi analitici, si ricava dal soggetto secondo il principio di contraddizione ; ciò non avviene nei giudizi sintetici, dove il predicato è aggiunto al soggetto.

« I giudizi sperimentali, come tali, sono tutti sintetici *a posteriori* (sull'esperienza si fonda la possibilità della sintesi del predicato della gravità col concetto di corpo) ».

« I giudizi matematici sono tutti sintetici *a priori*... La proposizione : " la più breve distanza tra due punti è la retta " è sintetica, giacchè il mio concetto di retta non contiene il concetto " la più breve ", che è dunque interamente aggiunto ».

Per Kant pertanto gli assiomi della geometria, come abbiamo visto, sono sintetici *a priori*. Tale è pertanto il quinto postulato di Euclide, per cui lo spazio euclideo è una forma necessaria e universale. La spazialità è nella dottrina kantiana un ordine necessario, ma ha una necessità soltanto in rapporto alla coscienza sensibile umana (46, *a* ; 70). Albergamo (2, *d* ; 9) ricorda che « Kant stesso aveva intravisto la possibilità logica di spazi a più di tre dimensioni. Nei " *Pensieri sulla vera valutazione delle forze vive* " (1747) scriveva : " La scienza di tutte le forme possibili dello spazio sarebbe senza dubbio la geometria più elevata che una intelligenza infinita potesse intraprendere " ». Kant, quindi, non escludeva la possibilità di spazi di diversa natura : egli asseriva però che l'esistenza di una geometria, che procede per costruzione di concetti *vuoti*, cioè scevri di ogni contenuto intuitivo, non costituisce una confutazione della sua dottrina dello spazio. Saranno possibili altri spazi, intendeva dire Kant, ma lo spazio che noi intuiamo, quello reale, è euclideo ed ha tre dimensioni.

I fondatori delle geometrie non euclidee, costruite cioè sulla negazione del quinto postulato di Euclide, interpretarono i loro risultati come una refutazione dell'asserto kantiano : il quinto postulato non è necessario, poichè, sulla sua negazione, possiamo costruire un edificio geometrico *coerente* ; è l'esperienza che dovrà decidere sulla sua verità o meno, cioè sulla sua applicabilità o meno alla realtà concreta. I neokantiani replicarono che il problema non è di carattere logico, ma gno-

seologico; si tratta cioè di indagare sul processo d'acquisto dell'idea di spazio e quale sia di tale conoscenza il valore e la portata; il problema verte sul carattere di necessità dei postulati geometrici, che non sono *analitici* (*logici*), ma *sintetici*. Siffatto argomento addotto dai matematici non rappresentò tuttavia una effettiva refutazione della dottrina kantiana dello spazio.

L'esperienza è inevitabilmente approssimativa; in ordine alla supposizione di uno spazio dotato di « curvatura » costante K (qualcosa di analogo alla *curvatura* di una superficie), poco diversa da zero, tutte le nostre esperienze, in un certo ordine di approssimazione, restano valide per K abbastanza piccolo, per cui siffatta inevitabile approssimazione delle esperienze porta a ritenere aderente alla realtà sia K poco diverso da 0 sia $K = 0$, vale a dire sia la geometria non euclidea, fondata sulla negazione del quinto postulato, sia la geometria di Euclide, che su quel postulato si fonda. Riemann e Clifford spiegarono questo fatto con una analogia. Immaginiamo, dicevano, degli *animaletti superficiali* (cioè piatti, bidimensionali) che si muovono sopra una superficie di curvatura costante. Per essi, se la curvatura è abbastanza piccola, la superficie non differisce dal piano tangente, e pertanto è naturale che essi interpretino le loro esperienze come se vivessero in un ambiente (superficiale) euclideo (curvatura nulla). Se uno di detti animaletti fosse un neokantiano, teorizzerebbe le condizioni della propria esperienza, assumendone come presupposto necessario l'intuizione euclidea; anzi vedrebbe in questa la condizione di ogni esperienza possibile, almeno finchè, con un'esperienza più ampia, non apparisse evidente la curvatura.

Dunque, data l'inevitabile approssimazione delle esperienze, il sorgere delle geometrie non euclidee non significava una refutazione della dottrina kantiana, come credettero i matematici. Data l'approssimazione delle esperienze era sempre lecito supporre che lo spazio reale fosse quello corrispondente a $K = 0$ (lo spazio euclideo della intuizione pura di Kant). E poichè il famoso filosofo di Koenigsberg non escludeva la possibilità di altre geometrie, fermo restando però il punto che, di tutte le geometrie possibili, una sola, l'euclidea, era quella applicabile, secondo Kant, allo spazio reale, cade l'obiezione fatta alla sua dottrina dai fondatori delle geometrie non euclidee.

Il vero punto debole di Kant risiede nel suo concetto di « intuizione pura », nel suo « a priorismo ». Dobbiamo soffermarci su questo punto delicato ed essenziale della questione: riconosciamo valida la grande scoperta di Kant della sinteticità degli assiomi e delle proposizioni matematiche, ma rifiutiamo il preteso loro « a priorismo ».

Riferiamo quanto scrive dottamente in proposito Albergamo (2, *e*): « Consideriamo il trapasso dall'esperienza alla astrazione matematica. Noi possiamo incrociare non più di tre bastoni, in maniera che ognuno di essi formi con un altro un angolo retto; la matematica idealizza e generalizza questa esperienza, sostituendo ai bastoni tre rette infinite, senza larghezza e senza spessore; e costituisce così il concetto dello spazio a tre dimensioni. Dall'esperienza apprendiamo che, camminando a passo a passo per una strada, finiremo con l'attraversarla tutta e col superarla; sostituiamo al passo un segmento rettilineo *A*, alla strada un segmento rettilineo *B* di maggiore lunghezza, e verremo allora alla conclusione che, dati *A* e *B*, vi sarà un multiplo di *A* maggiore di *B* (postulato di Archimede). Ancora un esempio: inchiodiamo alle estremità di un'asta *A* due aste *B* e *C*, di uguale lunghezza, in modo che ciascuna di esse formi con *A* un angolo retto; inchiodiamo una quarta asta *D* alle restanti estremità di *B* e di *C*: ci accorgeremo allora che anche *B* e *C* formano con *D* un angolo retto; immaginiamo che le aste non abbiano nè larghezza nè spessore, e avremo così formulato il quinto postulato di Euclide... La matematica pura, come dice Engels, ha per oggetto le forme spaziali e i rapporti quantitativi del mondo reale, e, quindi, una materia molto reale. Il fatto che questa materia si presenti in forma estremamente astratta solo superficialmente può nascondere la sua origine dal mondo esterno. Ma per poter indagare queste forme e questi rapporti nella loro purezza è necessario separarli completamente dal loro contenuto e accantonare questo contenuto come cosa irrilevante; così si perviene al punto senza dimensioni, alle linee senza spessore e senza larghezza, agli *a* e *b* e *x* e *y*, alle costanti e alle variabili...

Nel momento deduttivo, prosegue Albergamo, la matematica sembra liberarsi dall'esperienza, perchè ha da trarre soltanto le conseguenze da proposizioni che essa assume come *primitive*, le quali, come si è visto, sono l'espressione astratta e idealizzata di quelle esperienze estremamente semplici...

Questo procedimento deduttivo è tanto *a priori* quanto lo poteva essere il procedimento di quel tale gustatore di vini, che, assaggiando il vino di una botte, deduceva esservi in essa del cuoio.

Se la matematica ha una base sperimentale, perchè dunque per tanti secoli le si è attribuita, e tuttora molti le attribuiscono, una origine *a priori*? Perchè quelle proposizioni primitive esprimono appunto delle esperienze estremamente semplici e frequenti. Si è determinata così una certa associazione di idee, simili a quella, per cui il profano di fisica ritiene *evidente* la nozione che un corpo, urtandone un altro, lo muove: tanto evidente che, secondo lui, non c'è bisogno dell'esperienza

per apprenderla. In un ulteriore stadio, matematici e filosofi mutano alquanto la loro opinione circa la natura dei postulati: dicono che essi non sono evidenti, e che tuttavia bisogna *porli*, perchè il loro contrario non è concepibile... Si tentò di dimostrare, cioè di rendere evidente, il quinto postulato di Euclide; senonchè questi tentativi finirono con l'approdare a un risultato opposto.

Lobacevskij, Bolyai, Riemann riuscirono a fondare due tipi di geometria, partendo da postulati che sono la negazione del quinto postulato di Euclide. Altri matematici posero le fondamenta della geometria a più di tre dimensioni; Hilbert e Veronese fondarono il sistema non archimedeo. Da ciò si desume che non vi è postulato, sulla cui negazione non si possa fondare un sistema di proposizioni *ipotetico-deduttivo.* Crolla così il mito classico che faceva della matematica quasi una mistica rivelazione di eterne, immutabili verità iperuranie... I sistemi ipotetico-deduttivi si presentano come analisi e costruzioni formali, ma in realtà essi sono sempre indicativi di esperienze, reali o meramente concepibili, e l'errore del formalista puro sta nel non vedere questo loro essenziale carattere isomorfico... È veramente possibile al matematico prescindere dalla esperienza ed adottare un procedimento del tutto *a priori?* Lobacevskij *prima* elaborò la geometria non euclidea, e *poi,* misurando le parallassi di stelle sufficientemente lontane, cercò di stabilire se anche per grandi estensioni spaziali si conservasse valida la geometria euclidea, o se valesse invece quella non euclidea... A prima vista, in tale procedimento, sembra non si trapassi dall'esperienza alla astrazione e idealizzazione matematica, ma, al contrario, si proceda in senso inverso, dall'analisi e costruzioni formali, *a priori,* agli esperimenti compiuti per accertare *la realtà o non realtà* di un sistema configurantesi come un puro parto mentale. Nel fondare la geometria non euclidea, Lobacevskij non aveva tenuto proprio alcun conto dell'esperienza e del correlativo postulato di Euclide? La sua era davvero una " libera creazione ", una elucubrazione puramente *a priori?* Supponiamo che uno dica: " L'esperienza mi fa vedere che, quando in un oggetto è presente una determinata proprietà *A*, è presente anche un'altra determinata proprietà *B*; dunque sono *a priori* sicuro che, se vi fossero oggetti privi della proprietà *A*, questi oggetti sarebbero anche privi della proprietà *B* ".

Chi potrebbe qualificare " libera creazione " ed elucubrazione arbitraria, *a priori,* un siffatto ragionamento che ha per punto di partenza un fatto di esperienza? Ebbene, la geometria euclidea è, per così dire, la copia positiva, senza della quale Lobacevskij non avrebbe potuto

dedurre le corrispondenti copie *negative*, vale a dire le geometrie non euclidee ».

Poincaré aveva già acutamente osservato (74, *b* ; 123) : « ... Dal momento che si immagina una esperienza, s'immaginano con ciò stesso i risultati contrari, che essa può dare ».

« Tale deduzione, continua Albergamo, Lobacevskij non poteva farla liberamente, come a lui piaceva, ma proprio in quel modo determinato, che ognuno di noi, ripetendo il suo procedimento, sarebbe costretto a fare. Questo *a priori*, pertanto, ha anch'esso a fondamento un *a posteriori*... L'intelletto ha il potere di negare, in via di ipotesi, l'esperienza, negazione che quindi viene *dopo* l'esperienza, della quale è la negazione...

Senza dubbio vi sono dei casi, per esempio quello della geometria a più di tre dimensioni, che non hanno nulla di corrispondente nella nostra esperienza... E tuttavia anch'essi hanno, come punto di partenza, l'esperienza. Così, ad esempio, è un fatto di esperienza, che l'area di un quadrato, avente l per lato, è l^2 ; è altresì un fatto di esperienza che il volume di un cubo, avente s per spigolo, è s^3 : se ne conclude che, se vi fossero ipercubi aventi s per spigolo, il loro ipervolume sarebbe s^4. Qui il matematico compie una specie di estrapolazione partendo dalla esperienza : egli fa delle deduzioni *a priori* fondate sull'*a posteriori*, cioè fondate sul presupposto che il campo irreale, nel quale si entra per estrapolazione, sia *analogo* a quello reale...

Fin qui abbiamo considerato un tipo di astrazione che potremmo qualificare di primo grado, in quanto si ottiene direttamente dalla esperienza, sia positivamente (come nella geometria euclidea), sia negativamente, in rapporto a un determinato gruppo di esperienze (come nelle geometrie non euclidee) o in rapporto a ogni reale esperienza (come nella geometria degli iperspazi). Ma non vi è alcuna ragione che ci impedisca di assoggettare al procedimento astrattivo l'astrazione stessa. Con tali astrazioni di grado più elevato, il matematico sale via via in zone sempre più rarefatte, nelle quali egli non vede più nulla del mondo reale sottostante. Prima egli ci parlava in un linguaggio che, pur nella sua astrattezza, ci evocava cose concrete e reali, o più o meno in connessione con le cose concrete e reali ; perchè, ad esempio, anche se ci era impossibile formarci una rappresentazione dell'iperspazio, tuttavia eravamo in grado di intuire molto vagamente la sua connessione ed analogia con lo spazio che è sede dei fenomeni fisici e nel quale viviamo. Ora, invece, notiamo che egli evita con ogni cura d'introdurre nel suo linguaggio termini che possano, anche lontanamente, suscitarci idee e

immagini di cose reali... Si avranno così astrazioni di secondo, terzo, quarto grado e così via... Se invertiamo il cammino, se dalla astrazione più elevata passiamo ai suoi " contenuti ", i quali anch'essi sono astrazioni, e da queste ultime ancora passiamo ai loro relativi contenuti, e così via, arriveremo senz'altro a quelle astrazioni di primo grado, che sono direttamente attinte dall'esperienza ».

Già Davide Hume (46, *a* ; 53 e 54) ebbe a concludere, riguardo alla proposizione sintetica del nesso fra l'effetto e la sua causa, « che tale principio *a priori* è assolutamente impossibile ; secondo le sue conclusioni tutto ciò che chiamiamo metafisica si fonderebbe sulla semplice illusione di una presunta veduta razionale ; illusione, che essa in realtà attinge dall'esperienza e che ha ricevuto l'apparenza della necessità per via dell'abitudine ». Alberto Einstein così si esprime attorno al nostro argomento (30, *d* ; 333) : « ... I concetti della natura tridimensionale ed euclidea dello spazio possono essere fatti risalire ad esperienze relativamente primitive » e ancora (30, *d* ; 274) : « L'errore fatale che la necessità logica, antecedente ad ogni esperienza, fosse la base della geometria euclidea e della concezione spaziale che le appartiene, sorse dal fatto che la base empirica sulla quale si fonda la costruzione assiomatica della geometria era caduta in oblio ».

Dalle considerazioni anzidette segue che l'idea di spazio non è una « forma a priori » così come le proposizioni geometriche non sono necessarie e universali, come asseriva Kant, ma l'una e le altre traggono il loro essere, in ultima analisi, dall'esperienza.

CAPITOLO III.

Lo spazio fisio-psicologico: ottico, tattile e del senso muscolare.

Definizioni – Continuo fisico e continuo matematico – Lo spazio ottico puro (bidimensionale) e lo spazio ottico completo (tridimensionale) – Spazio tattile – Spazio del movimento – Cambiamenti interni: movimenti rigidi e movimenti non rigidi – Cambiamenti esterni: di posizione e di stato – Lo spazio rappresentativo (ottico, tattile e del movimento) non è nè omogeneo nè isotropo.

Ricordiamo un passo di Lobacevskij (52; 68): « Spazio, dimensione, luogo, corpo, superficie, linea, punto, direzione, angolo sono parole, con le quali si comincia la geometria, alle quali però non si congiunge mai un chiaro significato ». Vedemmo che anche Veronese (cap. I) faceva una netta distinzione fra spazio intuitivo, spazio fisico e spazio geometrico. Riteniamo che per condurre un discorso logico devesi precisare in modo rigoroso il significato che diamo alle parole che usiamo: ciò eviterà non poche confusioni e oscurità. Diciamo subito che per spazio intuitivo (Veronese) — da «intueor» = guardo dentro, vedo — rappresentativo (Poincaré), fisiologico, psicologico, fisio-psicologico (Enriques) intenderemo la stessa cosa, e cioè lo spazio *soggettivo*, l'idea di spazio, acquistata mediante i sensi. Poincaré avverte che (74, *b*; 38) «l'intuizione non è necessariamente fondata sulla testimonianza dei sensi...'; non possiamo rappresentarci, per esempio, il chilogono, e tuttavia noi ragioniamo per intuizione sui poligoni in generale, che comprendono il chilogono come caso particolare » e ancora (74; 46): « Vi sono due specie di intuizione: l'intuizione del numero puro, quella da cui può scaturire l'induzione matematica rigorosa, e l'intuizione sensibile, di cui l'immaginazione propriamente detta fa tutte le spese ». Non ci soffermeremo ad analizzare fino in fondo il primo tipo di intuizione, perchè a noi, per l'argomento che trattiamo, interessa l'intuizione sensibile, fondata essenzialmente sui sensi, ai quali soccorre, in maniera più o meno rilevante, l'immaginazione. Il primo gradino per l'acquisto dell'idea di spazio è la rappresentazione che di esso si formano

i sensi: in questo primo gradino ci rappresentiamo uno spazio soggettivo, anzi diversi spazi soggettivi, a seconda che intervenga il senso della vista o il senso del tatto o il senso muscolare (o del movimento). Sulle ragioni, per le quali i pensatori moderni risolvono, mediante la dottrina empirica o genetica, contro la tesi nativista di Kant, il problema psicologico circa il modo con cui l'intuizione costruisca la rappresentazione spaziale, abbiamo già detto nel precedente capitolo.

Prima di esporre cosa debba precisamente intendersi per spazio ottico, spazio tattile e spazio del movimento, accenneremo alla nozione di continuo fisico che è cosa affatto diversa dal continuo matematico. La nozione di continuo matematico è ricavata dall'esperienza? « Se così fosse, scrive Poincaré (74, *a*; 31), i dati bruti dell'esperienza, le sensazioni, sarebbero suscettibili di misura. Si è tentato, in effetti, di misurarle ed è stata formulata una legge, la legge di G.T. Fechner, secondo la quale la sensazione è proporzionale al logaritmo dello stimolo. Esaminando però da vicino le esperienze, su cui si è cercato di stabilire questa legge, si giunge ad opposte conclusioni. Si è osservato, per esempio, che un peso A di 10 grammi ed un peso B di 11 grammi producono sensazioni identiche; che nemmeno il peso B può venire distinto da un peso C di 12 grammi; e che tuttavia il peso A e il peso C possono distinguersi facilmente. I risultati bruti dell'esperienza sono quindi esprimibili con le relazioni seguenti:

$$(1) \qquad A = B;\ B = C;\ A < C$$

che possono essere considerati come la formula del continuo fisico. Vi è qui un disaccordo con il principio di contraddizione; la necessità di farlo cessare ci ha costretti ad inventare il continuo matematico, che è una scala, i cui scalini (numeri commensurabili o incommensurabili) sono infiniti ed esterni agli uni ed agli altri, invece di compenetrarsi gli uni negli altri come fanno, in accordo con le formule precedenti, gli elementi del continuo fisico ». Poincaré risponde quindi alla domanda, che ci siamo fatta, affermando che la nozione del continuo matematico *non* è ricavata dall'esperienza, ma è stata creata dalla mente dell'uomo: l'esperienza gliene ha fornito l'occasione. Poincaré introduce poi la nozione di *taglio* per precisare cosa debba intendersi quando affermiamo che il continuo fisico ha due o tre dimensioni. Abbiamo visto le relazioni che caratterizzano il continuo fisico. « Ogni *elemento* di quest'ultimo (74, *b*; 79) consiste in un insieme di sensazioni; ora può accadere o che un elemento non possa venire distinto da un altro elemento dello stesso continuo, se questo nuovo elemento corrisponde ad un insieme di sen-

sazioni troppo poco differenti, o, al contrario, che la distinzione è possibile; infine può accadere che due elementi non distinguibili da un terzo possano tuttavia distinguersi l'uno dall'altro. Ciò posto, se *A* e *B* sono due elementi distinguibili di un continuo *C*, si potrà trovare una serie di elementi E_1, E_2... E_n appartenenti tutti allo stesso continuo *C* e tali che ciascuno di essi sia indistinguibile dal precedente, che E_1 non si distingua da *A* e E_n da *B*. Si potrà dunque andare da *A* e *B* per un cammino continuo e senza lasciare *C*. Se questa condizione è soddisfatta da due elementi, a piacere, *A* e *B* del continuo *C*, potremo dire che questo continuo *C* è un tutto *senza interruzione*. Distinguiamo ora alcuni elementi di *C*, che potranno essere o tutti distinguibili l'uno dall'altro o formati a loro volta da uno o più continui. L'insieme degli elementi così arbitrariamente scelti fra gli elementi di *C* formerà quello che io chiamerò un *taglio*, o dei *tagli* ». « Se per *dividere* un continuo, dice più oltre Poincaré, basta considerare come tagli un certo numero di elementi distinguibili gli uni dagli altri, si dice che questo continuo è ad *una dimensione*; se, al contrario, per dividere un continuo è necessario considerare come tagli un sistema di elementi che formano essi stessi uno e più continui, diremo che questo continuo è a *più dimensioni* ». Come si vede la nozione del continuo fisico a più dimensioni poggia sul fatto semplicissimo che due insiemi di sensazioni possono essere discernibili o indiscernibili. Poincaré osserva che il criterio da lui introdotto per stabilire il numero di dimensioni di un continuo fisico poggia sulla stessa idea che i geometri utilizzano per stabilire il numero di dimensioni del continuo matematico. Senonchè Poincarè ha dato alla sua definizione una forma applicabile non al continuo matematico, ma al continuo fisico, il quale soltanto è suscettibile di rappresentazione.

Il continuo fisico è, quindi, *costituito da insiemi di sensazioni*: le formule (1), che definiscono il continuo fisico, mostrano che le sensazioni non sono suscettibili di misura. Osserviamo poi che il continuo fisico, considerato da Poincaré, è relativo all'osservatore: sono dell'osservatore le sensazioni il cui insieme costituisce appunto il continuo fisico.

Passiamo ora ad esaminare i diversi spazi fisiologici. Cominciamo con lo spazio *ottico* o *visuale*. Cosa intendiamo per siffatto spazio? Una immagine formata sul fondo della retina dà luogo a una impressione puramente visuale. Esaminando tale immagine, troveremo che essa è continua ed ha due dimensioni: essa costituisce *lo spazio visuale puro*. Osserva Poincaré (74, *a*; 62): « I punti della retina, astraendo dalle immagini che vi si possono formare, non hanno la medesima funzione. La macula lutea non può essere considerata identica ad un punto del-

l'orlo della retina. In effetti, non soltanto lo stesso oggetto vi produce impressioni molto vive, ma, in ogni quadro *limitato*, il punto occupante il centro non sembrerà identico ad un punto vicino ad uno degli orli ». Di qui l'importante conclusione che *lo spazio visuale puro non è omogeneo.* Ora, come avviene che la vista ci permette di apprezzare le distanze e di percepire quindi una *terza* dimensione ? Spiega Poincaré : « Questa percezione della terza dimensione si riduce allo sforzo di accomodazione, che bisogna fare, e a quello della convergenza, che occorre dare agli occhi, per percepire distintamente un oggetto. Son queste delle sensazioni muscolari del tutto differenti dalle sensazioni visuali, a cui dobbiamo la nozione delle due prime dimensioni. La terza dimensione ci sembra dunque avere la stessa funzione delle altre due. Ciò che si può chiamare *lo spazio visuale completo non è quindi uno spazio isotropo* ». Inoltre, osserva acutamente Poincaré, la terza dimensione ci è rivelata in due modi diversi : per lo sforzo di accomodazione e per la convergenza degli occhi. Queste due indicazioni sono sempre concordanti ; queste due sensazioni muscolari non ci sembrano indipendenti. Se ciò non avvenisse, se dette due sensazioni muscolari variassero indipendentemente l'una dall'altra, lo spazio visuale completo ci apparirebbe un continuo fisico a quattro dimensioni. Adattando agli occhi delle lenti, costruite convenientemente per far cessare l'accordo fra le sensazioni di convergenza e quelle di accomodazione, lo spazio visuale completo ci apparirebbe con una dimensione di più. Lo spazio ottico o visuale o dei raggi luminosi (16 ; 74) è, pertanto, un continuo fisico tridimensionale, non omogeneo, non isotropo.

Lo *spazio tattile* o dei regoli graduati (16 ; 74) è più complicato dello spazio visuale. Non riferiamo l'analisi sottile effettuata da Poincaré per stabilire le dimensioni dello spazio tattile. Diciamo solo che, ad esempio, i due continui fisici C e C', generati, l'uno dal mio primo dito D, l'altro dal mio secondo dito D', hanno ciascuno tre dimensioni. Un esame approfondito ci mostrerebbe l'identità dei due spazi tattili e così pure l'identità dello spazio tattile e dello spazio ottico. Il fatto poi che lo spazio tattile, determinato dalle sensazioni di un solo dito, abbia tre dimensioni, e che lo spazio visuale puro, al contrario, ne abbia solo due, si spiega con la circostanza che il tatto, a differenza della vista, non si esercita a distanza. Ciò significa che, per riconoscere, ad esempio, che l'oggetto A occupa nell'istante a il punto occupato da B nell'istante b, posso fare intervenire il mio occhio o il mio primo dito, o il mio secondo dito, ecc. Basta che il criterio relativo a un dito sia soddisfatto, perchè lo siano tutti gli altri ; ma non basta che il criterio relativo al-

l'occhio lo sia (74, *b* ; 108/9). È un fatto sperimentale ordinario che il tatto è in grado di compiere una verifica esauriente, che l'occhio, esercitandosi a distanza, non può compiere.

Lo spazio del movimento o delle sensazioni muscolari è costituito da sensazioni, « che contribuiscono quanto e più delle sensazioni ottiche e tattili alla genesi della nozione dello spazio fisico : sono appunto le sensazioni che accompagnano ogni nostro movimento e diconsi *sensazioni muscolari*. E poichè ogni muscolo dà origine a una sensazione speciale, suscettibile di aumento o di diminuzione, l'insieme delle nostre sensazioni muscolari dipende da tante variabili, quanti muscoli abbiamo. Da questo punto di vista, *lo spazio del movimento ha tante dimensioni quanti muscoli abbiamo* » (74, *a* ; 64). A chi obiettasse che le sensazioni muscolari contribuiscono a formare la nozione dello spazio, solo perchè noi abbiamo il senso della direzione di ciascun movimento e perchè esso fa parte integrante della sensazione, Poincaré risponde che « se così fosse, se una sensazione muscolare non potesse nascere se non accompagnata da questo senso geometrico della *direzione*, lo spazio geometrico sarebbe una forma imposta alla nostra sensibilità ». Poincaré continua osservando che « le sensazioni corrispondenti a movimenti nella stessa direzione sono legate nella mente da una semplice *associazione di idee*, cui si riduce ciò che chiamiamo *direzione* ». Notiamo, incidentalmente, che in questo passo, come in diversi altri, troviamo giustificata l'osservazione di Veronese che la necessaria distinzione fra spazio fisico, spazio intuitivo e spazio geometrico non viene rispettata nemmeno da grandi matematici come Helmholtz e Poincaré ! Su questa distinzione torneremo in seguito.

L'importanza dei movimenti del nostro corpo nella genesi della nozione dello spazio è mostrata da Poincaré nella distinzione, che egli fa, fra cambiamenti di posizione e cambiamenti di stato. Per un essere completamente immobile non vi sarebbe nè spazio nè geometria : le variazioni, che gli spostamenti degli oggetti esterni farebbero subire alle sue impressioni, sarebbero da lui attribuite non a cambiamenti di posizione, ma semplicemente a cambiamenti di stato. Poincaré distingue i cambiamenti, che le nostre impressioni possono subire, in esterni ed interni : 1) i cambiamenti interni sono volontari e accompagnati da sensazioni muscolari ; 2) i cambiamenti esterni non sono dovuti alla volontà dell'osservatore, nè sono accompagnati da sensazioni muscolari. Una sedia si sposta e cambiano quindi le impressioni, che l'osservatore subisce : tale cambiamento è, pertanto, esterno. Con un movimento del corpo l'osservatore ristabilisce la sensazione che provava

primitivamente: con questo cambiamento interno egli corregge quel cambiamento esterno. Quando ciò avviene, vale a dire quando, mediante un cambiamento interno, si riesce a correggere un cambiamento esterno, si ha un cambiamento di posizione. Un gas si va espandendo o comprimendo nell'interno di un recipiente con chiusura a stantuffo; con nessun cambiamento interno si può correggere quel cambiamento esterno. Siffatto cambiamento esterno dicesi allora cambiamento di stato.

I cambiamenti interni, cioè quelli dipendenti dai nostri movimenti, da movimenti volontari del nostro corpo, sono, a loro volta, distinguibili in due categorie: 1) quelli prodotti da movimenti rigidi del nostro corpo, cioè quelli per i quali una coppia qualsiasi di punti del nostro corpo conserva inalterata la sua distanza durante il moto: in altre parole quelli per i quali il nostro corpo non muta di atteggiamento; 2) quelli prodotti da movimenti non rigidi, per i quali avviene l'opposto di ciò che si verifica nei movimenti rigidi: ad esempio, durante il moto, le braccia, inizialmente ripiegate, si sono distese. Pertanto sono i cambiamenti interni, nei quali il nostro corpo mantiene lo stesso atteggiamento, quelli, dianzi considerati, capaci di correggere un cambiamento esterno, mentre tale capacità non hanno i cambiamenti interni, nei quali si produce un cambiamento di atteggiamento. Possiamo schematizzare così quanto veniamo dicendo:

<table>
<tr><td rowspan="4">cambiamenti</td><td rowspan="2">*interni* (dipendenti dai nostri movimenti)</td><td>senza cambiamento di atteggiamento</td><td>correggono cambiamento esterno</td></tr>
<tr><td>con cambiamento di atteggiamento</td><td>non correggono cambiamento esterno</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*esterni* (non dipendenti dai nostri movimenti)</td><td>*di posizione*</td><td>correggibili mediante cambiamenti interni senza cambiamento di atteggiamento</td></tr>
<tr><td>*di stato*</td><td>non correggibili con cambiamenti interni</td></tr>
</table>

Ogni movimento del nostro corpo è accompagnato da sensazioni muscolari; l'insieme (variabile) di tali sensazioni costituisce appunto lo spazio muscolare o del movimento. Osserva ancora Poincaré che uno stesso cambiamento esterno può essere corretto da due cambiamenti interni corrispondenti a sensazioni muscolari differenti.

Einstein, nel rilevare (30, *d* ; 273) che Poincaré distingue due specie di alterazioni di un oggetto corporeo, mutamenti di stato e mutamenti di posizione, essendo, questi ultimi, alterazioni che noi possiamo annullare mediante movimenti volontari del nostro corpo, aggiunge : « Che ci siano oggetti corporei ai quali, entro una certa sfera di percezione, noi non possiamo attribuire alterazioni di stato, ma solo di posizione, è un fatto di fondamentale importanza per la formazione del concetto di spazio (in un certo grado, persino per giustificare la stessa nozione di oggetto corporeo). Chiamiamo questi oggetti praticamente rigidi ». Poincaré osserva che i *corpi solidi*, cioè rigidi, sono quegli oggetti, che, dopo essersi spostati, mutano le nostre impressioni (ci appaiono di forma diversa), ma che possono apparirci nuovamente nella loro forma primitiva mediante un movimento *correlativo* del nostro corpo.

Lo spazio rappresentativo, rileva ancora Poincaré (74, *a* ; 65), sotto la sua triplice forma, visuale, tattile e motrice, è, quindi, essenzialmente diverso dallo spazio geometrico : esso non è omogeneo, nè isotropo ; non si può nemmeno dire che abbia tre dimensioni. Vedremo nei capitoli seguenti come dallo spazio fisiologico o rappresentativo si pervenga alla nozione dello spazio fisico e, infine, alla nozione dello spazio geometrico.

CAPITOLO IV.

Come si perviene dalla nozione dello spazio soggettivo (fisio-psicologico) alla nozione dello spazio obiettivo (spazio fisico o mondo esterno).

Attorno alla cosidetta « realtà in sè » – Come i sensi ci aiutano a liberarci dai sensi ! — Concetto di spazio fisico di Lobacevskij, Poincaré, Veronese, Carlson, Einstein – Definizione di spazio fisico.

Abbiamo riferito nel cap. II il seguente concetto di Einstein : « Il primo gradino della costituzione di un *mondo esterno reale* consiste nella formazione del concetto di oggetti corporei. Dalle esperienze sensibili assumiamo taluni complessi di impressioni sensibili : connettiamo ad esse il concetto di oggetto corporeo... Il secondo gradino consiste nell'attribuire al concetto di oggetto corporeo un significato in grande misura indipendente dalle impressioni sensibili, che originariamente lo hanno fatto sorgere. In questo consiste l'attribuire ad un oggetto corporeo *una esistenza reale* ». Precisiamo ora più diffusamente il processo di obiettivazione dello spazio soggettivo. Gli spazi fisiologici sono relativi all'osservatore e, quindi, soggettivi perchè legati al soggetto. Questi esplora la realtà con i suoi strumenti soggettivi, che sono i suoi organi sensoriali, le sue percezioni. Come si passa ora alla « realtà in sè », al mondo esterno indipendente dal soggetto, allo spazio fisico ? Soffermiamoci un istante sul concetto di « realtà in sè ». Facciamo un esempio : lo zucchero soggettivamente appare bianco, dolce, ecc. Se lo svestiamo da questi caratteri antropomorfici, scopriamo che esso è una determinata struttura chimica, che costituisce il *vero essere* dello zucchero, lo zucchero « in sè ». A questo punto alcuni filosofi cercano ingenuamente una rappresentazione sensibile di questo essere dello zucchero e poichè non lo trovano, dicono che l'essere « *in sè* » dello zucchero è inconoscibile. Noi invece diciamo chè gli organi sensoriali, come il tatto, la vista, ecc. ci aiutano precisamente a liberarci dai sensi. Come ? Mediante associazioni e confronti delle diverse percezioni, il soggetto riesce a obiettivare,

in larga misura, il mondo esterno. Gli elementi di speciale dissimetria dei vari spazi fisiologici si eliminano nel loro confronto. Proprio mediante i sensi il soggetto finisce col rappresentarsi il mondo esterno, lo spazio fisico. Dagli spazi fisiologici *relativi all'osservatore* si passa alla rappresentazione dello spazio fisico, dello spazio obiettivo, reale, dovendosi rilevare, tuttavia, in questo processo, l'importanza prevalente del senso del tatto rispetto al senso della vista. Con la vista percepiamo, ad es., i margini di una strada che vanno via via convergendo, ma il senso muscolare o del movimento e il senso del tatto ci dicono che i due margini non convergono, ma si prolungano parallelamente; quindi, associando e confrontando le percezioni della vista, del tatto e del senso muscolare, riusciamo a rappresentarci una strada nella sua forma reale. Occorre però precisare meglio quale accezione intendiamo dare alle parole « spazio fisico », da non confondersi con lo spazio geometrico, non suscettibile, come diremo più diffusamente nel prossimo capitolo, di alcuna rappresentazione. Lo spazio fisico, abbiamo già detto con Veronese, è il mondo esteriore. D'accordo con Descartes, Berkeley, Leibniz, Lobacevskij, Poincaré, Veronese, Carlson, Einstein (vedi cap. I), neghiamo l'esistenza di uno « spazio vuoto », di uno « spazio in sè ». Lo spazio reale, obiettivo, fisico s'identifica con il mondo esteriore, con gli oggetti corporei, con le cose. « Possiamo concepire tutti i corpi nella natura come parti di un unico corpo globale, che noi chiamiamo *spazio* » (Lobacevskij, 52 ; 61). « Le esperienze non ci fanno conoscere se non i rapporti dei corpi fra di loro » (Poincaré, 74, *a* ; 85). « Lo spazio fisico è il mondo esteriore » (Veronese, 90). « Lo spazio assolutamente vuoto... non esiste in natura e quindi per la fisica manca di qualsiasi interesse e di qualsiasi realtà » (Carlson, 19 ; 233). « Un contatto permanente di due corpi in tre o più punti significa che essi sono uniti in un corpo composto, quasi-rigido. Si può dire che il secondo corpo forma una (quasi-rigida) prosecuzione del primo corpo e può, a sua volta, esser continuato quasi-rigidamente. La possibilità della continuazione quasi-rigida di un corpo è illimitata. La totalità di tutte le continuazioni quasi-rigide concepibili in un corpo *B* è l'infinito *spazio*, che esso determina » (Einstein, 30, *d* ; 273). « Non può esservi qualcosa che sia uno spazio vuoto, cioè uno spazio senza campo. Così Descartes non era molto lontano dalla verità quando pensava che si dovesse escludere la esistenza di uno spazio vuoto. Il nocciolo centrale dell'idea di Descartes acquista quindi maggiore esattezza se viene enunciato così: non esiste nessuno spazio " vuoto di campo " » (Einstein, 30, *d* ; 345). Ora, dicevamo

al capitolo I, vi è un legame di equivalenza fra materia, massa, energia e campo. Pertanto per spazio fisico intenderemo appunto il mondo esterno, cioè la totalità dei suoi oggetti nel senso più largo e più moderno di queste parole: in altri termini la totalità dei corpi, sia intesi, secondo Einstein (30, *b*; 252), come grandi concentrazioni di energia (corpi materiali), sia intesi come deboli concentrazioni di energia (campi). Spazio fisico è il mondo fisico negli aspetti molteplici della massa-energia di cui è costituito. In questo senso, e solo in questo senso, continueremo a parlare di *spazio fisico*.

muscolare e del movimento e il senso del tatto [illegible] gli non convergono, ma si prolungano parallelamente; quindi, associando e confrontando le percezioni della vista, del tatto e del senso muscolare, riusciamo a rappresentarci una strada nella sua forma reale. Occorre però precisare meglio quale accezione intendiamo dare alle parole «spazio fisico», da non confondersi con lo spazio geometrico, non suscettibile, come diremo più diffusamente nel prossimo capitolo, di alcuna rappresentazione. Lo spazio fisico, abbiamo già detto con Veronese, è il mondo esteriore. D'accordo con Descartes, Berkeley, Leibniz, Lobacevskij, Poincaré, Veronese, Carlson, Einstein (vedi cap. I), neghiamo l'esistenza di uno «spazio vuoto», di uno «spazio in sé». Lo spazio reale, obiettivo, fisico s'identifica con il mondo esteriore, con gli oggetti corporei, con le cose. «Possiamo concepire tutti i corpi della natura come parti di un unico corpo globale, che noi chiamiamo *spazio*» (Lobacevskij, 52 : 61). «Le esperienze non ci fanno conoscere se non i rapporti dei corpi fra di loro» (Poincaré, 74, *a* : 85). «Lo spazio fisico è il mondo esteriore» (Veronese, 90). «Lo spazio assolutamente vuoto... non esiste in natura e quindi per la fisica manca di qualsiasi interesse e di qualsiasi realtà» (Carlson, 19 : 233). «Un contatto permanente di due corpi in tre o più punti significa che essi sono uniti in un corpo composto, quasi-rigido. Si può dire che il secondo corpo forma una (quasi-rigida) prosecuzione del primo corpo e può, a sua volta, esser continuato quasi-rigidamente. La possibilità della continuazione quasi-rigida di un corpo è illimitata. La totalità di tutte le continuazioni quasi-rigide concepibili in un corpo B è l'infinito *spazio*, che esso determina» (Einstein, 30, *d* : 273). «Non può esservi qualcosa che sia *uno spazio vuoto*, cioè uno spazio *senza campo*. Così Descartes non era molto lontano dalla verità quando pensava che si dovesse escludere la esistenza di uno spazio vuoto. Il concetto centrale dell'idea di Descartes acquista quindi maggiore esattezza se viene enunciato così: non esiste nessuno spazio "vuoto di campo"» (Einstein, 30, *d* : 340). Ora, dicevamo

CAPITOLO V.

Lo spazio geometrico o astratto.

In che consiste la Geometria – L'astrazione geometrica – Il processo mentale di astrazione – Topologia, geometria metrica e geometria proiettiva, suggerite rispettivamente dalle sensazioni tattili-muscolari, del tatto speciale e della vista. I movimenti: gruppo di trasformazioni – Perchè il V postulato di Euclide non è del tutto « evidente ».

La Geometria poggia su un sistema di nozioni o enti primitivi, non definiti, e di proposizioni primitive, enunciate senza dimostrazione (assiomi e postulati), che possono considerarsi come « definizioni implicite » di tali enti. Questi, suggeriti dall'esperienza, sono il risultato di un processo di elaborazione mentale, di un processo di *astrazione*, perchè un punto, una linea, una superficie, come li intende la geometria, sono *concetti astratti*. « Se le rappresentazioni ricorrono nei procedimenti geometrici, scrive Albergamo (2, *d*; 15), ognuno sa che le immagini stanno in sostituzione dell'ente geometrico irrappresentabile, al quale, per una serie infinita di correzioni, dovrebbero, alla fine, se fosse possibile, condurre. L'ente geometrico non è, per conseguenza, mai dato; ma a chi voglia assumerlo come termine di un procedimento geometrico si può semplicemente indicare, suggerire la serie delle rappresentazioni, di cui esso è il limite irraggiungibile e la negazione. E così, al principiante di geometria si suggerisce la rappresentazione di un filo teso, sottile e lungo, che dev'essere via via sostituita dalla rappresentazione di un filo ancora più sottile e più lungo, per modo che, se fosse possibile esaurire questo processo infinito, si avrebbe, come ultimo termine della serie, quell'ente geometrico, che vien denominato retta e che è, come limite della serie, irrappresentabile ». Nella « Logica » (Laterza, 1928; pag. 236) Croce scrive : « Il punto inesteso, la linea senza superficie, la superficie senza solidità sono impensabili, come lo sono tutti i concetti derivati, come quelli delle figure geometriche, nessuno dei quali ha o può avere la somma degli angoli eguale a due retti, perchè nessun

triangolo ha esistenza ». Noi diremo meglio, fra gli altri con Fano (34 ; 81), che « i concetti geometrici, benchè acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo : non si possono quindi " misurare " gli angoli di un triangolo (astratto), nè affermare che nello spazio fisico sia " *verificata* " una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e di grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato ». Con una « certa evidenza » ci appare sufficientemente concordante con la realtà il postulato di Euclide e, in base a quest'ultimo, asseriamo che la somma deglia ngoli di un triangolo (astratto) vale due retti. Anche Croce non distingue sufficientemente tra geometria e realtà, fra spazio geometrico e spazio fisico. « La geometria, scrive Veronese (90), deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme pure astratte e gli assiomi con ipotesi bene determinate, rese cioè indipendenti dall'intuizione, cosicchè la geometria diventi parte della matematica pura, ossia della estensione astratta ». Lo spazio geometrico, costituito dall'insieme degli enti geometrici, è, pertanto, astratto. Con un procedimento di astrazione ci si innalza dallo spazio fisiologico e da quello fisico a quello geometrico. Su questo processo ci soffermeremo fra un momento. Vogliamo dire qui, ancora (e all'argomento dedicheremo il prossimo capitolo VII), che alla domanda « che scienza è la geometria ? » autorevoli autori rispondono cadendo in un errore giustamente rilevato da Veronese (90) laddove, insistendo sulla necessaria distinzione da farsi fra spazio fisico, spazio intuitivo e spazio geometrico, scrive testualmente, come abbiamo già riferito : « Forme codeste dello spazio non bene distinte nemmeno da grandi matematici, come dall'Helmholtz e dal Poincaré ». Alla suddetta domanda, ad es., un autore eminente come Giovanni Giorgi (38 ; 991) risponde : « È stato discusso se la geometria sia scienza logica o sperimentale o con fondamento psicologico. Tutti e tre i punti di vista sono corretti e corrispondono a tre diversi ordini di ricerche possibili. Si può studiarla infatti come : *a)* geometria fisica, *b)* geometria psicologica, *c)* geometria astratta o teoretica ». Siffatta enunciazione porta a confusioni concettuali già rilevate. La geometria è astratta e soltanto astratta. I suoi enti *non derivano, ma sono solo suggeriti* dagli spazi fisiologici e dallo spazio fisico. Bridgman scrive (16 ; 74) : « La geometria, in quanto si vogliano applicare i suoi risultati al mondo fisico esterno e in quanto non la si consideri solo un sistema logico, costruito sulla base di postulati, risulta una scienza sperimentale ». Pur ammet-

tendo che nulla vieta di esprimerci anche così, ritengo poco conveniente, ai fini del rigore e della chiarezza, siffatta enunciazione. La geometria non è scienza fisica o sperimentale, non è un «ramo della fisica», ma solo scienza astratta. Analizzeremo meglio questo punto più avanti (cap. VII) e vedremo in che consista l'applicazione della geometria al mondo fisico. Riprendiamo ora il processo mentale di astrazione. Enriques mette in rapporto i vari indirizzi geometrici con le sensazioni provenienti dalla vista e dal tatto. L'indirizzo geometrico di maggiore generalità è l'Analysis situs o Topologia, nel quale non sono ancora formati i concetti di retta, di lunghezza, di angolo, ma si considerano soltanto linee, superficie, corpi a tre dimensioni e si riguardano come equivalenti due enti che possono essere ricondotti l'uno all'altro, mediante una trasformazione continua. Dalla Topologia si vanno staccando, mediante due diverse particolarizzazioni, la geometria metrica, ove sono fondamentali i concetti di distanza e di angolo, e la geometria proiettiva, dove non intervengono nozioni metriche, ma solo relazioni fra punti, rette e piani. La tesi di Enriques è che i tre rami suddetti, e precisamente la Topologia, la geometria metrica e la proiettiva, per quanto concerne l'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, sono legati a tre ordini di sensazioni, rispettivamente: alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e a quelle della vista. Noi diremo, più precisamente, che gli spazi fisio-psicologici del movimento, del tatto e della vista, per un processo di astrazione, vengono concepiti dalla mente come spazi geometrici astratti, rispettivamente: topologico, metrico e proiettivo. Rimandando il lettore a trattazioni esaurienti, come quelle di Enriques ed altri, diremo solo che le sensazioni tattili, e in ispecie quelle di pressione, vengono riferite al luogo della cute che è stato toccato: due punti, che, in una certa posizione della cute, distino fra loro di un certo intervallo (*soglia della sensazione*) non vengono più percepiti come distinti. Una lunghezza costante viene percepita inegualmente dalle varie parti della cute, e cioè come maggiore là dove la finezza della sensazione è maggiore. La soglia della sensazione, che appartiene sia al tatto che alla vista, ci mostra, come già vedemmo, che lo spazio fisiologico (tattile o visivo) *non è continuo* (nel senso matematico). Un processo di associazione e di astrazione conduce dalle rappresentazioni fisiologiche allo *spazio continuo* della geometria. Il giudizio comparativo, poi, delle distanze o lunghezze, e più generalmente delle grandezze degli oggetti, esige il riferimento ad un organo tattile, scelto come sede di paragone costante. Questo organo tattile deve essere movibile, rimanendo invariato e adattabile agli oggetti,

affinchè oggetti diversi possano essere così metricamente confrontati. Esso diviene un vero organo di *tatto speciale*, che, per l'uomo, è normalmente la mano. Le sensazioni tattili conducono a concepire, pertanto, la geometria metrica.

Riguardo allo spazio ottico, Helmholtz ritiene che il giudizio comparativo delle distanze non sia un dato immediato della visione, ma un acquisto dovuto all'abitudine di associare i dati di questa a quelli delle sensazioni tattili-muscolari. Dato immediato della vista è il complesso di quelle particolari proprietà che prendono il nome di proiettive, fra le quali non figurano le lunghezze o distanze. Con un esame approfondito Enriques mostra che i dati immediati della visione ci porgono le nozioni di retta e di piano, cioè la vista ci fornisce gli elementi costruttivi, che, per astrazione, costituiscono la geometria proiettiva. Da un minuzioso lavoro di ricerca di Levi (38 ; 999) emerse un risultato : esiste la *retta metrica*, suggerita dai movimenti rigidi, ed è del tutto indipendente dalla *retta proiettiva*, suggerita dalle visuali luminose. L'esperienza ci mostra che, in ordine alle possibili osservazioni, esse coincidono. Quando si costruisce una riga, il suo spigolo rettilineo si fabbrica come retta metrica, per mezzo di un lavoro di abrasione fondato su moti rigidi ; quando si fa la verifica col ribaltamento su un foglio di carta, si fa una verifica di geometria metrica ; quando poi si verifica la riga traguardando, è l'altra definizione di retta quella che s'applica. Insistiamo ancora sul fatto che qui si parla di verifiche di rette empiriche che vengono assunte come approssimazioni delle rette geometriche, che sono, ripetiamo, astratte e, quindi, irrappresentabili.

Già vedemmo che lo spazio rappresentativo o psicologico è un continuo fisico e che lo spazio geometrico è un continuo matematico. Mentre lo spazio rappresentativo non è nè isotropo, nè omogeneo, nè continuo (nel senso matematico), lo spazio geometrico è isotropo, omogeneo e continuo.

Esaminiamo ora come si pervenga a concepire i postulati della geometria proiettiva e della geometria metrica.

Il postulato di determinazione della retta («Due punti appartengono ad una linea retta, che è ugualmente determinata da altri due punti qualunque di essa ») viene suggerito dall'associazione di due rappresentazioni in base all'ipotesi dell'esistenza di una linea, che sia vista da ogni suo punto come un punto solo. Dette due rappresentazioni sono queste : la retta si presenta sia come linea, non passante per il centro della visione, le cui proiezioni sono rette, sia come linea o raggio passante per il centro di visione e che, vista da un occhio, appare come un punto. Enriques (32, *b* ; 195/6) illustra siffatto processo, sui cui particolari non ci soffermiamo. Un analogo processo conduce al *postulato*

del piano: « il piano contiene la linea retta che ne congiunge due punti arbitrari ». Pertanto, conclude Enriques, i postulati propri della geometria proiettiva vengono riconosciuti come condizioni per l'associazione di certe rappresentazioni visive, da cui hanno origine i concetti astratti della retta e del piano.

I postulati della geometria metrica riguardano i movimenti e la congruenza o eguaglianza geometrica delle figure, considerate come corpi rigidi astrattamente sovrapponibili. Quanto al movimento, esso (secondo Klein ed altri) stabilisce nello spazio, o in una regione di spazio, una *corrispondenza biunivoca puntuale* (*trasformazione*). Perchè la relazione di due figure trasformabili con un movimento (*congruenza*) possa considerarsi come una eguaglianza, devono essere soddisfatte le seguenti due condizioni: *a*) eseguendo due movimenti successivi deve ottenersi, come *prodotto*, una trasformazione che sia ancora un movimento (se $A = B$ e $B = C$ allora $A = C$); *b*) la trasformazione *inversa* di un movimento deve essere ancora un movimento (dal fatto che $A = B$ e $B = A$, consegue $A = A$). Tutto può esprimersi dicendo che « i movimenti formano un *gruppo di trasformazioni* ». Tale affermazione, osserva Enriques, ha il carattere di una affermazione di fatto, che implica certe proprietà d'*invarianza relativa* dei corpi *solidi* in movimento e dell'organo tattile, proprietà indipendenti dal modo come l'organo tattile passa da una posizione ad un'altra. Enriques si sofferma sul processo con cui si perviene al concetto astratto di equidistanza. Siano $A\,B$ e $C\,D$ due coppie di « punti » fisici equidistanti (la distanza comune sia, ad es. di tre dita). Ponendo le tre dita fra A e B e fra C e D si avranno due sensazioni successive che, pur differendo per la posizione in cui è stato collocato l'organo tattile, hanno qualche cosa di comune, inerente all'invarianza dell'organo stesso nel passaggio dall'una all'altra posizione. Le rappresentazioni delle due coppie $A\,B$ e $C\,D$ non sono identiche, ma possono associarsi, per quello che hanno di comune, in una unica rappresentazione concettuale di *distanza*. Quindi la relazione di equidistanza $A\,B = C\,D$ implica una identità e una non identità: una identità, in quanto dette due rappresentazioni, rispetto a *certe relazioni*, sono associate ad una sola; non identità, in quanto, rispetto ad *altre relazioni*, esse sono effettivamente distinte. Il concetto astratto di equidistanza, fondamento della congruenza geometrica, è il risultato di un processo di astrazione e di associazione, che, sotto un certo aspetto, riunisce due rappresentazioni. I postulati della congruenza (geometria metrica) sorgono da detto processo di astrazione.

A questo punto riferiamo brevemente una notevolissima considerazione di Enriques (32, *b*; 198) sul postulato delle parallele. Abbiamo

visto come le rappresentazioni o sensazioni fisiologiche del tatto (generale e speciale) suggeriscano, con un processo di astrazione, gli enti astratti e i postulati che li collegano, della geometria metrica, e come le rappresentazioni o sensazioni fisiologiche dell'organo della vista suggeriscano, con un processo di astrazione, gli enti astratti, e i postulati che li collegano, della geometria proiettiva. La geometria ordinaria unifica in un solo concetto della linea retta la immagine visiva e tattile di questa, riconoscendo così una medesima *simmetria fisica* dei fenomeni ottici e meccanici. La proprietà ottica fondamentale della retta è quella di essere determinata da due punti mentre la sua proprietà meccanica è quella di essere linea di minima distanza o asse di rotazione di un corpo solido. La congruenza della retta « ottica » e di quella « meccanica » implica l'ipotesi che la luce si propaghi secondo la linea metricamente più breve, cioè secondo la retta definita nel senso meccanico. Ciò rende possibile l'associazione delle due geometrie (tattile e visiva) in una sola geometria metrico-proiettiva, dove la congruenza riveste l'aspetto logico di una eguaglianza. Lo spazio metrico, quindi, e lo spazio proiettivo si fondono nel concetto astratto di un unico spazio metrico-proiettivo, che risulterà infinito per la illimitatezza della linea retta nei riguardi sia ottici che meccanici e per il suo aspetto di « linea aperta », ciò che esclude la rappresentazione riemanniana. Vediamo ora come si pervenga al quinto postulato di Euclide, escludendo la rappresentazione iperbolica di Lobacevskij. Il concetto astratto di rette parallele viene suggerito dai due ordini di sensazioni, tattili e visive. Nell'aspetto ottico sono parallele due rette di un piano non secantisi (limiti di rette secantisi in un punto lontano); nella rappresentazione tattile si presentano come *linee equidistanti*. Il postulato delle parallele, implicante l'ipotesi della propagazione rettilinea della luce, sorge pertanto dall'associazione tattile-visiva, che conduce al concetto metrico-proiettivo dello spazio. Rileviamo che la minore « evidenza » del quinto postulato risiede nella maggiore complessità del processo di astrazione, che ad esso conduce, intervenendo in tale processo dati di sensi diversi (tatto e organo della vista).

Nel cap. III accennammo al continuo fisico, definito da Poincaré, affatto distinto dal continuo matematico. Le formule che definiscono il continuo fisico provano che le sensazioni non sono suscettibili di misura, a differenza del continuo matematico e degli enti geometrici. « Lo spazio fisico e quello intuitivo, dice Veronese, non possono essere definiti ; può essere invece definito lo spazio geometrico ».

CAPITOLO VI.

Il mondo non euclideo di Poincaré.

Le condizioni fisiche di un mondo non euclideo immaginato da Poincaré e la geometria non euclidea ad esso coordinabile – Geodetiche non euclidee – Traiettorie curvilinee dei raggi luminosi – Perchè il postulato di Euclide, nel mondo immaginato da Poincaré, non appare vero.

Alla fine del capitolo precedente abbiamo rilevato la circostanza che il quinto postulato di Euclide è un concetto geometrico, che sorge, per astrazione, dall'associazione di sensazioni ottiche e tattili, sottolineando il fatto che le sensazioni ottiche sono interpretate in base alla ipotesi della propagazione rigorosamente rettilinea della luce (e, quindi, in base all'ipotesi di mezzi rigorosamente omogenei). Sul postulato delle parallele si fonda, come è noto, la geometria euclidea. Il mondo non euclideo immaginato da Poincaré è un mondo dove le geodetiche non sono rettilinee nel senso euclideo di questa parola, mentre nel mondo reale le esperienze ordinarie ci suggeriscono con una « certa evidenza » il quinto postulato e la rettilineità delle geodetiche (in particolare dei raggi luminosi).

Poincaré (74, *a*; 72) immagina un mondo chiuso in una grande sfera e sottoposto alle seguenti leggi: la temperatura, non uniforme, è massima al centro, decrescendo verso la periferia, per ridursi allo zero assoluto sulla superficie sferica che limita siffatto mondo. La legge di variazione della temperatura è determinata così: la temperatura assoluta è proporzionale a R^2-r^2, essendo R il raggio della sfera ed r la distanza del punto considerato dal centro della sfera. Tutti i corpi, in tale mondo, hanno lo stesso coefficiente di dilatazione in modo che la lunghezza di un regolo risulta proporzionale alla sua temperatura assoluta; infine un oggetto trasportato da un punto ad un altro, la cui temperatura sia diversa, si mette immediatamente in equilibrio termico con il suo nuovo ambiente. Un oggetto mobile si rimpicciolisce sempre di più a mano a mano che si avvicina alla superficie sferica limite. Un

abitante di tale mondo, che si diriga verso la sfera limite, raffreddandosi, diventa sempre più piccolo; i suoi passi diventano sempre più corti, per cui a lui, tale mondo, finito per chi osserva dall'esterno, sembrerà infinito. Mentre nel mondo ordinario i movimenti dei corpi solidi (considerati indeformabili) sono rigidi, in quel mondo i solidi sono sottoposti a movimenti non rigidi, subendo una deformazione a causa delle differenze di temperatura. Se nel mondo ordinario le deformazioni dovute alle variazioni di temperatura sono accidentali, e si trascurano, in quel mondo ipotetico tali variazioni sono essenziali, obbedendo a leggi regolari e semplicissime. Poincaré formula poi una ipotesi ulteriore: la luce attraversa, in quel mondo, ambienti diversamente rifrangenti, in modo che l'indice di rifrazione sia inversamente proporzionale a $R^2 - r^2$. I raggi luminosi non percorreranno, quindi, traiettorie rettilinee, ma curvilinee. Abbiamo trattato al capitolo III dei cambiamenti di posizione. Anche in siffatto mondo cambiamenti sopravvenuti nella posizione degli oggetti esteriori possono essere *corretti* da movimenti correlativi degli esseri senzienti, che vi abitano. Se un oggetto si muove, deformandosi (movimento non rigido, che Poincaré chiama *spostamento non euclideo*) un essere senziente, le cui impressioni siano state modificate dallo spostamento dell'oggetto, le potrà ristabilire effettuando un conveniente movimento « non euclideo ». Benchè le distanze rispettive delle diverse parti abbiano subito delle variazioni, tuttavia le parti primitivamente in contatto tornano a stare in contatto. Le impressioni tattili, pertanto, restano le stesse. Dato poi che, a causa della rifrazione, i raggi luminosi risultano curvilinei, nemmeno le impressioni visive muteranno. Poincaré conclude asserendo che, se gli abitanti di tal mondo costruissero una geometria, questa non sarebbe suggerita, come la geometria euclidea, dai movimenti dei solidi invariabili, ma verrebbe costruita una geometria basata su esperienze diverse, come i cambiamenti di posizione sopra descritti (spostamenti non euclidei): sarà la *geometria non euclidea*. Poincaré, tuttavia, non si sofferma a distinguere la geometria non euclidea, che costruirebbe un abitante di quel mondo, e la geometria non euclidea, che formulerebbe chi osservasse quel mondo dal di fuori. Mentre chi osserva dal di fuori è portato a considerare, per adattarla a quel mondo, una geometria non euclidea a curvatura variabile, l'abitante di quel mondo sarebbe indotto a costruire una geometria simile, per certi rispetti, alla nostra (euclidea), seppure diversa per altri rispetti, come subito vedremo.

Il professor Young, dell'Università di Kansas, fa (94) una analisi acuta del mondo di Poincaré. « Poichè la temperatura è proporzionale

a R^2-r^2, egli dice, il suo valore sarà massimo per $r=0$ (cioè nel centro della sfera) e nullo per $r=R$ (cioè sulla sfera limite). Sulla superficie di ogni sfera, dentro la sfera data e a questa concentrica, la temperatura è costante. Ogni oggetto, avvicinandosi alla superficie limite, diventa indefinitamente piccolo, essendo la sua grandezza in diretta proporzione con la temperatura. Siffatto mondo, mentre a noi, che osserviamo dall'esterno, appare finito, ad un essere che vi abiti apparirebbe infinito, perchè, avanzando verso la periferia, con la caduta della temperatura, il suo corpo si contrarrebbe, diventando sempre più piccolo così come sempre più corti diventerebbero i suoi passi. Per raggiungere il limite del suo mondo, tale abitante dovrebbe effettuare un numero infinito di passi. Egli sarebbe tanto sicuro della infinita estensione del suo mondo quanto lo siamo noi riguardo al nostro.

Sorge quindi la questione se siffatto abitante potrebbe rendersi conto del modo con cui i corpi mutano di grandezza al mutare della loro distanza dal centro del mondo. Il modo con cui abitualmente confrontiamo le grandezze degli oggetti è quello di collocarli l'uno accanto all'altro e misurarli con un regolo. Se detto abitante si muove da un punto del suo mondo ad un altro e prende gli oggetti con sè, questi muterebbero nello stesso tempo e nelle stesse proporzioni con cui egli muta; detto abitante non avrebbe modo, quindi, di scoprire siffatta legge. Pertanto, per certi riguardi, la sua geometria somiglierebbe alla nostra geometria ordinaria; per altri rispetti, tuttavia, si discosterebbe notevolmente da questa. Supponiamo, per esempio (vedi Tav. X), che un individuo desideri andare (fig. a sinistra) dalla sua casa (H) al suo ufficio (B), mediante il numero di passi minore possibile. Ora il numero minore di passi non sarà effettuato lungo il segmento rettilineo ($H\,B$) congiungente i due posti, ma piuttosto lungo il cammino curvo ($H\,m\,B$), che rivolge la convessità verso il centro, e ciò perchè i passi si fanno ivi più lunghi. Infatti può essere rigorosamente provato, mediante il calcolo delle variazioni, che il percorso cui corrisponde il minor numero di passi è costituito dall'arco di un cerchio, che taglia ortogonalmente la sfera limite. Siffatto cerchio chiameremo la "linea più breve". Per ogni coppia di punti, come H e B, dentro la sfera, vi è una, e una sola, "linea più breve[14]". Se le linee più brevi, in un mondo siffatto, sono curve, segue che la *luce non viaggia lungo linee rette*, come già accennammo. Questa condizione può essere ottenuta riempiendo la sfera con un gas, il cui indice di rifrazione muti da punto a punto. Un uomo situato in Q (fig. a destra), che avanzasse verso P, mantenendo questo punto sempre direttamente in vista, si muoverebbe lungo l'arco di un cerchio e

arriverebbe in P dopo aver effettuato il più piccolo numero possibile di passi. «Noi vediamo allora, prosegue Young, che queste linee più brevi, nella geometria di quell'abitante, hanno una funzione molto simile a quella delle linee rette nella nostra geometria ordinaria; infatti, queste linee più brevi all'abitante di quel mondo appaiono "rettilinee"». Inoltre, dal fatto che in un tale mondo predominano archi di cerchio segue che il postulato di Euclide, riguardante le parallele, non può apparire vero. Nella figura a destra, a causa delle leggi che regolano quel mondo, $Q\ R$ è parallelo a $P\ R$, e $Q\ S$ è parallelo a $P\ S$. E cioè per il punto P, esterno alla geodetica $S\ R$, si possono condurre *due* parallele alla medesima.

Young così conclude: «Le osservazioni, che potremmo fare sullo spazio di un tale mondo, non differirebbero da quelle, alle quali siamo abituati: tutto apparirebbe lo stesso. Ma — e questo è il punto che bisogna rilevare — l'astratta geometria non euclidea, sopra descritta, può essere applicata a dette osservazioni con legittimità uguale a quella, con cui ad esse può essere applicata la geometria euclidea. Se noi distinguiamo fra scienza astratta e la sua concreta applicazione, vediamo che non si pone nemmeno la domanda se noi viviamo in un mondo euclideo o in un mondo non euclideo. Con queste considerazioni abbiamo voluto mostrare che la nostra conoscenza intuitiva dello spazio non è di per se stessa sufficiente per caratterizzare con precisione e compiutezza il significato e le inerenti proprietà da attribuire al fondamentale concetto astratto della geometria; abbiamo voluto mostrare, in particolare, che il postulato di Euclide, sebbene secoli di tradizione ce lo abbiano fatto sembrare evidente, non è, tuttavia, il solo postulato concepibile per descrivere ogni aspetto dei fenomeni osservabili ».

CAPITOLO VII.

La Geometria e la Fisica.

Esigenza di una rigorosa distinzione fra Geometria e Fisica – Inesattezze in cui incorrono alcuni Autori – Legge e principio, geometria e scienza sperimentale secondo Poincaré – Isomorfismo fra Geometria e Fisica – Sistemi fisico-matematici – Leggi e teorie fisiche e relazioni matematiche.

Ho già accennato nel cap. V alla tendenza di considerare la Geometria come «scienza sperimentale» o «ramo della Fisica». Ritengo con Veronese e con Poincaré che tale asserto non è esatto. Vedemmo come si esprime Bridgman (16 ; 74) : «La geometria, in quanto si vogliano applicare i suoi risultati al mondo fisico esterno e in quanto non la si consideri solo un sistema logico costruito sulla base di postulati, risulta una scienza sperimentale». Attorno alla matematica e al mondo reale così scrive Einstein (30, *f* ; 2, 3) : «La questione circa la verità dei singoli teoremi geometrici è... ricondotta a quella della verità degli assiomi. Ora, già da tempo, non soltanto è riconosciuto che a tale questione non si può dare risposta da un punto di vista geometrico, ma soprattutto che essa non ha senso. Non è lecito chiedere se sia vero che per due punti passi una sola linea retta. Si può soltanto dire che la geometria euclidea considera figure, che essa chiama *rette,* ed alle quali essa assegna la proprietà di essere univocamente determinate da due punti. Il concetto di *verità* non conviene alle asserzioni della pura geometria, perchè noi, con la parola *vero,* usiamo sempre indicare la concordanza con un oggetto reale ; la geometria non si occupa di mettere i propri concetti in relazione con gli oggetti dell'esperienza, ma soltanto di comporre i concetti stessi con nesso logico. Se poi... ai teoremi della geometria euclidea aggiungiamo l'altro teorema, che a due punti di un oggetto reale corrisponde sempre la stessa distanza (segmento), per un qualsiasi spostamento che noi possiamo imprimere al corpo, allora dai teoremi della geometria euclidea discendono altri teoremi circa la possibile giacitura relativa di corpi rigidi reali. La geometria così completata de-

vesi allora considerare come un ramo della fisica. E allora, a buon diritto, si può far questione circa la verità dei teoremi geometrici in tal modo interpretati; poichè si può domandare se quei teoremi si adattano a quei reali oggetti, che noi abbiamo coordinato ai concetti geometrici ». In altro scritto asserisce ancora Einstein (30, *d*; 218): « I corpi solidi sono da considerarsi, rispetto alle loro possibili posizioni, come corpi della geometria tridimensionale euclidea. Quindi le proposizioni di Euclide contengono affermazioni sul comportamento dei corpi praticamente rigidi. La geometria così completata è evidentemente una scienza naturale; in realtà possiamo considerarla come la più antica branca della Fisica... Chiameremo questa geometria completata " Geometria pratica " e la distingueremo dalla " Geometria puramente assiomatica " ». Rileviamo che sia Bridgman che Einstein avvertono l'esigenza di distinguere fra geometria, nel senso astratto che le compete, e scienza pratica. Questa stessa esigenza, e alcune considerazioni, che subito faremo, inducono a mantenere *con tutto rigore* la distinzione fra Geometria e Fisica. La "concordanza" di un ente geometrico "con un oggetto reale", "il coordinare gli oggetti reali ai concetti geometrici", come acutamente si esprime Einstein, non significa affatto che gli enti e concetti geometrici, da astratti che essi sono, si tramutino in enti concreti, cioè fisici. La Geometria non è quindi, in alcun modo, scienza sperimentale. Estendendo poi, come devesi estendere, il concetto di concordanza, non soltanto fra corpi rigidi e enti della geometria euclidea, ma fra corpi qualsiasi, deformabili o indeformabili, e enti geometrici di una qualsivoglia geometria, euclidea o non euclidea (a curvatura costante o a curvatura variabile), ancor più si afferma la rigorosa esigenza di indicare con la parola Geometria una scienza astratta, e soltanto astratta, e con la parola Fisica, una scienza sperimentale, evitando confusioni e oscurità, giustamente rilevate da Veronese. Anche Enriques indulge a considerare la Geometria come ramo della Fisica. Egli critica (32, *b*; 155) il concetto di Poincaré circa la convenzionalità, affermata da questi, degli assiomi della geometria, non tenendo molto conto forse che Poincaré (74, *a*; 9) insiste sul fatto che non si tratta di convenzioni arbitrarie, ma convenzioni cui siamo indotti dalle proprietà di certi fenomeni e di certi fatti d'esperienza. Circa il mondo immaginato da Poincaré (cap. VI), Enriques scrive (32, *b*; 155/6) che in un mondo siffatto « la temperatura sarebbe un vero carattere geometrico, giacchè tutti i corpi (compreso il nostro organismo) avrebbero la temperatura appartenente al posto che essi occupano; non essendo più possibile portare a contatto, e quindi confrontare le dimensioni di corpi

diversamente caldi, non si potrebbe più dire che i corpi si dilatano con la temperatura ». Che un fenomeno fisico non sia accidentale, ma sistematico, obbedendo ad una legge generale come quella immaginata da Poincaré (la temperatura di ogni corpo è funzione del posto), non significa affatto che il fenomeno non continui ad essere fisico. La temperatura è il livello di una energia e non ha nulla a che fare con la geometria. Nel mondo immaginato da Poincaré i movimenti non sono rigidi. In quel mondo, gli esseri che lo abitassero sarebbero indotti ad elaborare una geometria diversa da quella euclidea, ma ciò non vuol dire che « la temperatura sarebbe un vero carattere geometrico » ! Concordo con Enriques quando, dopo aver notato (32, *b* ; 157) che « la circostanza che la geometria *preceda* in una esposizione dogmatica la Meccanica e la Fisica, e che le cognizioni geometriche stiano alla base dello stesso metodo sperimentale nelle ricerche fisiche, si converte in un rapporto di dipendenza necessaria, che trova la sua espressione nell' "*a priori*" kantiano », egli nega la legittimità di una « gerarchia scientifica, nella quale i rapporti più complessi appariscono subordinati ai più semplici »; ma non sono più d'accordo con lui quando afferma che « la geometria, anzichè essere ritenuta come necessariamente precedente alla Fisica, viene ad esserne considerata una parte ! ». La geometria, ripetiamolo ancora, tratta oggetti astratti, mediante assiomi, che sono, come scrive Schlik, « definizioni implicite » di quelli. Altro è dire che la geometria viene suggerita dalle esperienze del mondo fisico, altro è dire che la geometria "fa parte" della Fisica ! Per una precisazione rigorosa di questa critica mi riferirò ancora a Poincaré e, infine, enuncerò le mie conclusioni.

Poincaré distingue e precisa il concetto di legge e quello di principio. La proposizione : "gli astri seguono la legge di Newton", può decomporsi (74, *b* ; 213) « in due altre : *a*) la gravitazione segue la legge di Newton ; *b*) la gravitazione è la sola forza che agisca sugli astri. In tal caso la proposizione *a*) non è più che una definizione e sfugge al controllo dell'esperienza ; ma allora tale controllo potrà esercitarsi sulla proposizione *b*). E ciò è necessario, perchè la proposizione, che abbiamo decomposta, predice fatti bruti verificabili. È in virtù di tali artifici che, per un inconsapevole nominalismo, gli scienziati hanno edificato al di sopra delle leggi quelli che essi chiamano principî. Quando una legge ha ricevuto una sufficiente conferma dall'esperienza, possiamo prendere due atteggiamenti : o lasciare in campo questa legge (ed essa resterà allora soggetta a una incessante revisione, che, senza alcun dubbio, finirà col dimostrare che essa è solo approssimativa) oppure si può elevarla a *principio*, adottando proposizioni tali che essa risulti certa-

mente vera. Per questo si procede sempre nella stessa maniera. La legge primitiva enuncia una relazione fra due fatti bruti A e B; si introduce fra questi due fatti bruti un intermediario astratto C, più o meno fittizio (tale era nell'esempio precedente l'entità impalpabile della gravitazione). Ed allora abbiamo una relazione fra A e C, che possiamo supporre rigorosa, e che è il *principio*, e un'altra fra C e B, che rimane una legge rivedibile. Il principio non è più soggetto al controllo dell'esperienza ». Passando poi alle relazioni fra i corpi, Poincaré prosegue: « L'esperienza ci fa conoscere relazioni tra i corpi: ecco il fatto bruto; queste relazioni sono estremamente complicate. Invece di osservare direttamente la relazione del corpo A con il corpo B, noi introduciamo tra di essi un intermediario che è lo spazio (geometrico, aggiungiamo noi), ed osserviamo tre distinte relazioni: quella del corpo A con la figura A' dello spazio (geometrico), quella del corpo B con la figura B' dello spazio (geometrico), quella delle due figure A' e B' tra di loro. Questo giro è vantaggioso, perchè la relazione di A con B è complicata, ma differisce poco da quella di A' con B', che è semplice; la relazione complicata, quindi, può essere sostituita dalla relazione semplice fra A' e B', e dalle due altre relazioni, che ci fanno conoscere che le differenze fra A e A', da una parte, e tra B e B', dall'altra, sono piccolissime. Per esempio, se A e B sono due corpi solidi naturali, che si muovono deformandosi leggermente, noi osserviamo due figure *invariabili* mobili A' e B'. La relazione tra A e B è una legge bruta, ed essa è stata decomposta; noi abbiamo ora due leggi, che esprimono le relazioni di A con A'; di B con B'; e un principio, che esprime la relazione (i movimenti relativi) di A' con B'. L'insieme di tali principî si chiama geometria ». Poincaré prosegue dicendo che una relazione geometrica, che può sostituire una relazione che, considerata allo stato bruto, dovrebbe essere considerata meccanica, può sostituirne un'altra, che dovrebbe essere considerata ottica, ecc., *e nega poi recisamente che la geometria sia una scienza sperimentale.* Precisiamo ora che cosa s'intende per relazione fra A e A', fra B e B'. A e B sono due corpi; A' e B' sono figure dello spazio geometrico. Le relazioni fra A e A', fra B e B' si riducono ad una corrispondenza: al corpo A, per esempio un triangolo costruito con assi di ferro, facciamo corrispondere un triangolo geometrico A'; al corpo B una figura geometrica B'. Non diremo con Poincaré: « Le differenze fra A e A', B e B' sono piccolissime ». Diremo meglio che l'oggetto concreto A ci richiama una figura geometrica A', cui faremo corrispondere A. Non possiamo parlare di « differenze piccolissime »: fra A, oggetto concreto, e A', ente astratto, esiste la differenza che passa

tra il particolare e l'universale, fra un oggetto concreto singolo e un ente astratto, cui si può far corrispondere un numero infinito di oggetti concreti. Diremo piuttosto che ad A faremo corrispondere quell'ente geometrico A', la cui forma astratta, meglio d'ogni altro ente geometrico, richiami la forma dell'oggetto concreto A. Questa corrispondenza, concordanza o coordinazione, chiameremo *isomorfismo*. Isomorfica chiameremo altresì la corrispondenza che vi può essere, ad es., fra relazioni di trigonometria piana e rapporti trigonometrici tra corpi reali, e così via. Le relazioni geometriche astratte vengono così applicate alle relazioni dei corpi e dei fenomeni concreti. Pertanto concordo con Enriques, quando egli dice (32, e; 306) « La geometria presa di per sè è un'astrazione », sopprimendo però le parole "presa di per sè"; non concordo affatto con la frase, che immediatamente segue: « in concreto essa (la Geometria) si prolunga nella Fisica ». Fra enti e relazioni geometriche e oggetti e relazioni fisiche vi è una corrispondenza isomorfica, che consente applicare la geometria alla fisica, senza alcun « prolungamento » di quella a questa! Concordo con Enriques, come ho già detto, nel negare ogni legittimità al concetto di una « gerarchia scientifica », per la quale « la Geometria deve *precedere* la Meccanica e la Fisica, e le cognizioni geometriche debbono stare alla base dello stesso metodo sperimentale nelle ricerche fisiche ». Non vi è, infatti, alcuna precedenza. Ma diremo di più, richiamandoci ad un esempio trattato da Poincaré (74, *a*; 80): « Se, supposto l'impossibile, si venissero a scoprire parallassi negative, o si riuscisse a provare che tutte le parallassi sono superiori ad un certo limite, ci sarebbe da scegliere tra due conclusioni: potremmo rinunciare alla geometria euclidea, mantenendo ferma la legge della rettilineità dei raggi luminosi, oppure potremmo mantenere la geometria euclidea e modificare le leggi dell'ottica, ammettendo che la luce non si propaghi rigorosamente in linea retta ». Possiamo enunciare, quindi, un criterio del tutto generale. Siano, F, F', F'',... fenomeni fisici, e G, G', G'',... sistemi geometrici (matematici). Sia FG un sistema costituito da una proposizione matematica G con la corrispondente esperienza F cui si riferisce. F, da sola, non ha carattere logico; G, da solo, non ha carattere fisico; ma fra F e G vi è complementarità. Possiamo avere anche $F'G'$, $F''G''$, ecc. FG è un sistema fisico-matematico. FG, $F'G'$, $F''G''$ hanno la medesima struttura, cioè sono fra loro isomorfi. Nell'esempio di Poincaré possiamo avere FG o $F'G'$, aventi la medesima struttura. Con FG indichiamo la legge di rettilineità della luce F, cui corrisponde una geometria non euclidea G; con $F'G'$ indichiamo la legge ottica, per cui la luce non si propaga rigo-

rosamente in linea retta, F', cui corrisponde la geometria euclidea G'. Come si vede, in questo criterio, non vi è luogo a precedenze di sorta. In altre parole: se un gran numero di esperienze ci hanno suggerito l'ente astratto « retta euclidea », mantenendo la geometria euclidea potremmo modificare, in accordo con eventuali esperienze, la legge ottica della rettilineità della luce; se invece riteniamo che la luce si propaghi in linea retta, allora è giocoforza far corrispondere a siffatta « linea retta fisica » una retta geometrica, che non è più la retta della geometria euclidea, ma la retta (geodetica) di una geometria non euclidea. In questo modo si evita ogni ibridismo concettuale « fisico-geometrico » e l'applicazione della Geometria alla Fisica appare chiara attraverso la reale natura dei metodi utilizzati per realizzarla.

Insisto ancora sul fatto che la matematica è una astrazione che non può, in alcun momento, essere confusa con il piano concreto. « La matematica è una cosa molto pura, che non ha nulla a che fare con le esperienze » scrive Erwin Schrödinger (82; 62). La matematica esprime certi rapporti astratti che, nel modo già detto, possono applicarsi ai fenomeni fisici, senza peraltro identificarsi mai con i rapporti concreti, con i quali si stabilisce, di volta in volta, una corrispondenza isomorfica. Ciò è reso ancora più evidente dalla seguente osservazione di Poincaré (74, *a*; 155) circa lo scopo e il compito delle teorie scientifiche: « Nessuna teoria sembrava più solida di quella di Fresnel, che attribuiva la luce ai movimenti dell'etere. Poi, invece, le si preferì la teoria di Maxwell. Tuttavia entrambe le teorie soddisfacevano allo scopo precipuo di prevedere fenomeni ottici. Le equazioni differenziali esprimono dei rapporti e, se questi rapporti conservano la loro realtà, le equazioni differenziali restano vere. Esse ci insegnano che vi è un certo rapporto fra qualcosa e qualche altra cosa: solo che questo qualcosa un tempo lo chiamavano *movimento*, e ora lo chiamiamo *corrente elettrica* ». È il caso di ricordare le famose parole di Bertrand Russell: « La matematica è una scienza, nella quale non si sa di che cosa si parli e non si sa se quello che si dice è vero ». Persico osserva (71, *a*; 321) che « un'equazione della forma

$$\Delta u = 4 \pi \varphi (x, y, z) \tag{2}$$

si è presentata nella cinematica dei fluidi incompressibili, nella Teoria dell'attrazione newtoniana, nell'elettrostatica e nella magnetostatica.

Un'equazione della forma

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

si è presentata nelle oscillazioni dei corpi elastici, nell'elettromagnetismo.

L'equazione

$$\Delta u = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

si è presentata nella conduzione del calore, nella diffusione di gas o liquidi.

Questo fatto permette di raggruppare molti fenomeni, fisicamente diversissimi, in pochi tipi di problemi matematici, fondamentali, che conviene studiare dal punto di vista puramente analitico, prescindendo dal significato fisico delle quantità che vi figurano. Un gruppo di fenomeni fisici può ricevere diverse interpretazioni teoriche, cioè essere "spiegato" con due o più modelli, ognuno dei quali rende egualmente conto dei risultati sperimentali nell'ambito di quel gruppo di fenomeni ».

Credo, quindi, quanto mai giustificato il richiamo di Veronese, quando insiste sull'errore di non distinguere sufficientemente tra Matematica e Fisica. Gli esempi ora ricordati mettono ancora più chiaramente in luce i veri termini del problema e la necessità di un maggior rigore di linguaggio laddove vogliamo precisare la reale natura della nostra azione nelle ricerche e nello studio del mondo che ci circonda.

si è presentata nelle oscillazioni dei corpi elastici, nell'elettromagnetismo.

L'equazione

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \qquad (4)$$

si è presentata nella conduzione del calore, nella diffusione di gas o liquidi.

Questo fatto permette di raggruppare molti fenomeni, fisicamente diversissimi, in pochi tipi di problemi matematici, fondamentali, che conviene studiare dal punto di vista puramente analitico, prescindendo dal significato fisico delle quantità che vi figurano. Un gruppo di fenomeni fisici può ricevere diverse interpretazioni teoriche, cioè essere "spiegato" con due o più modelli, ognuno dei quali rende egualmente conto dei risultati sperimentali nell'ambito di quel gruppo di fenomeni.

Credo, quindi, quanto mai giustificato il richiamo di Veronese, quando insiste sull'errore di non distinguere sufficientemente fra Matematica e Fisica. Gli esempi ora ricordati mettono ancora più chiaramente in luce i veri termini del problema e la necessità di un maggior rigore di linguaggio laddove vogliamo precisare la reale natura della nostra azione nelle ricerche e nello studio del mondo che ci circonda.

CAPITOLO VIII.

La curvatura dello spazio.

Curvatura dello spazio geometrico – Geometria euclidea e Geometria non euclidea a curvatura costante o variabile – Curvatura dello spazio fisico e suo significato relativo alla scelta del tipo di geometria coordinabile ai fenomeni fisici da descrivere.

Cosa dobbiamo intendere per « curvatura » dello spazio ? Anzitutto distingueremo fra curvatura dello spazio geometrico e curvatura dello spazio fisico. Consideriamo prima lo spazio geometrico.

La geometria euclidea dicesi anche geometria piana, geometria dello spazio piano (curvatura nulla). Precisiamo questo concetto. La geometria euclidea si fonda sul V postulato, il quale, com'è noto, è equivalente al seguente asserto : la somma degli angoli interni di un triangolo vale due retti. Il piano è una superficie, anzi la più semplice delle superficie. Su una porzione di piano possiamo esprimere la distanza Δl di due punti, riferendoci ad infinite coppie di valori, Δx_1, Δx_2 di coordinate cartesiane ortogonali, passanti, rispettivamente, per i due punti estremi di Δl, e scriveremo, applicando il teorema di Pitagora : $\Delta l^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2$. In particolare nell'intorno infinitesimo di ogni punto del piano si ha $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Il teorema di Pitagora costituisce la maggiore caratteristica del piano, poichè esprime una proprietà dei triangoli rettangoli piani : affermare quindi che in *ogni* intorno infinitesimo dei punti di una superficie vale la riferita equazione quadratica, significa affermare che quella superficie è un piano. Per superficie generiche non può dirsi lo stesso. Gauss generalizzò allora la relazione differenziale suddetta, estendendone la validità a qualunque superficie. Egli dimostrò che la forma differenziale quadratica

$$(5) \qquad dl^2 = a_{11}\, dx_1^2 + a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{21}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 = \\ = \sum_{i,\,k}{}_1^2\, a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k$$

rappresenta la distanza di due punti infinitamente vicini di una generica superficie, essendo $a_{ik} = a_{ki}$ funzioni continue di x_1, x_2. Così ebbe origine la geometria differenziale. L'ordinario spazio geometrico euclideo dicesi *piano*, perchè la distanza fra due punti, con successiva applicazione del teorema di Pitagora, può esprimersi ancora mediante la relazione $\Delta l^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$. Uno *spazio* dicesi *piano* quando in *ogni* intorno infinitesimo vale la relazione differenziale $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Gli spazi, dove siffatta relazione pitagorica non è applicabile e dove bisogna ricorrere alla relazione generalizzata di Gauss $dl^2 = \sum_1^3{}_{i,k}\, a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k$, diconsi *spazi curvi*. *B.* Riemann estese tale criterio a spazî a più di tre dimensioni, nei quali la forma quadratica simmetrica riferita si scrive

$$(6) \qquad dl^2 = \sum_1^n{}_{i,k}\, a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k,$$

dove ciascuna quantità dx_i e dx_k rappresenta un elemento di una delle n coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ del continuo e i coefficienti a_{ik} rappresentano funzioni assegnate, univoche, continue e derivabili, finchè occorre, di dette coordinate. Quando la formula precedente si riduce alla somma dei quadrati di queste coordinate: $dl^2 = \sum_1^n{}_i\, dx_i^2$, allora si ha la *varietà piana* o *spazio euclideo*. La forma differenziale $dl^2 = \sum_1^n{}_{i,k}\, a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k$ è relativa a varietà a *curvatura* in generale *variabile;* quando la varietà è a *curvatura* costante (cioè la curvatura in un punto e secondo una giacitura assegnata ha un valore costante, qualunque siano questo punto e la giacitura) detta forma differenziale assume una forma compresa nel tipo (34; 127):

$$(7) \qquad dl^2 = U(x_i) \sum dx_i^2$$

nella cui funzione U figura il valore costante di curvatura K. Gli spazi a curvatura costante sono gli analoghi delle superficie a curvatura costante (piano, sfera, superficie pseudosferiche). Gli spazi a curvatura costante nulla ($K = 0$) sono gli spazi *piani* (euclidei e pseudoeuclidei). Gli spazi a curvatura costante $\gtrless 0$ hanno metrica non euclidea, che è, rispettivamente, la geometria ellittica e quella iperbolica. Il piano della geometria non euclidea (iperbolica) di Lobacevskij, con tutte le sue pro-

prietà, può essere rappresentato da una superficie, la pseudosfera, dello spazio euclideo ; il piano della geometria non euclidea (ellittica) di Riemann, quando due rette s'incontrano in due punti opposti, può essere rappresentato dalla superficie sferica dello spazio euclideo, oppure da una superficie analoga, se due rette s'incontrano in un sol punto. A seconda che si abbia $K = 0$ o $K \neq 0$ l'ente geometrico fondamentale superficiale «*piano*» è piano o, rispettivamente, curvo, nel senso ordinario, intuitivo di queste parole. Aggiungiamo, infine, che uno spazio a curvatura costante può essere applicato su se stesso, analogamente a quanto si verifica per il piano euclideo, per la sfera e per le superficie pseudosferiche, e cioè, in uno spazio siffatto, è possibile sovrapporre due suoi punti arbitrari P, P' e due qualunque *ennuple* di direzioni mutuamente ortogonali e di egual senso, uscenti da essi. Le figure, in questo spazio, hanno libera movibilità : non si deformano, i movimenti sono rigidi ; ciò che non avviene in uno spazio riemanniano del tipo più generale, dove una figura *rigida* è legata alla posizione che occupa, ossia non può spostarsi. In uno spazio siffatto ogni spostamento implica una deformazione : i movimenti non sono rigidi. Torneremo sull'argomento diffusamente più avanti.

Consideriamo ora lo spazio fisico, dando a queste parole il senso datogli nel cap. IV. Cosa intendiamo dire per curvatura dello spazio fisico ? Diciamo subito che l'idea dell'esistenza di uno spazio in sè, più o meno radicata e più o meno chiara nella mente di molti, ha dato alle parole «curvatura dello spazio (fisico)» un senso quanto mai sibillino. Confesso di esser rimasto sorpreso nel leggere (48 ; 340) il giudizio dato, anni fa, da Vincenzo Cerulli, allora Presidente della Società Astronomica Italiana, sulla curvatura dello spazio di Einstein : dichiarandosi fedele a Newton, Cerulli, riguardo a siffatta curvatura, parla di «crisi degenerativa» sopravvenuta nel campo scientifico. Il prof. Michele La Rosa (48 ; 352), riferendosi alle *geodetiche* dello spazio della Teoria della Relatività Generale, si abbandona a frasi angosciose come questa : «Proviamo un affannoso senso di smarrimento, un profondo ed acuto disagio, che ci viene dal sentire vacillare nella nostra mente le basi stesse della nostra *ragione*». Dedico alla Teoria di Einstein la seconda parte di questo lavoro, ma qui rilevo subito che i giudizi di Cerulli, La Rosa ed altri non oscuri studiosi hanno in gran parte origine proprio da quelle insufficienti distinzioni fra spazio astratto e spazio fisico denunciate da Veronese, e da concetti non abbastanza chiari su ciò che debba intendersi per spazio fisico. Nei capitoli precedenti abbiamo precisato tutto ciò e vedremo che tali precisazioni ci consentiranno eliminare ogni

oscurità circa il concetto di *curvatura dello spazio*. Vedremo che si tratterà di un mistero non più arduo dell'uovo di Colombo. Poichè lo spazio fisico si identifica con gli oggetti corporei, con le cose, con la materia, con i campi, e poichè il concetto di curvatura è legato a procedimenti di misura, dobbiamo indagare se, per misurare corpi e campi, per calcolare quantità fisiche, dobbiamo applicare un tipo di geometria piuttosto che un altro, o diversi tipi di geometria, a seconda dei corpi, campi o fenomeni, che costituiscono l'oggetto della nostra ricerca. Nel capitolo precedente abbiamo parlato del sistema fisico-matematico *FG*. Se, per assurda ipotesi, si venissero a scoprire parallassi negative, dicevamo, o si riuscisse a provare che tutte le parallassi sono superiori ad un certo limite, saremmo liberi di scegliere indifferentemente fra queste due soluzioni o sistemi fisico-matematici : 1) i raggi luminosi sono curvi e lo spazio non ha alcuna curvatura (lo spazio è euclideo) ; 2) lo spazio ha una curvatura (non è euclideo) e i raggi luminosi seguono le geodetiche di questo spazio, cioè percorrono traiettorie rettilinee (nel senso non euclideo). Vediamo subito, in questo esempio, che parlare di curvatura nulla o diversa da zero dello spazio equivale ad applicare al mondo fisico, ai fenomeni fisici, una geometria piuttosto che un'altra. Esaminiamo i fenomeni fisici che ci suggeriscono l'idea di retta euclidea : 1) il movimento dei corpi *solidi*, ove la retta si presenta come *asse*, i cui punti restano immobili in una rotazione ; 2) la Dinamica dei *punti materiali*, ove la retta si presenta come *traiettoria* di un punto, il cui movimento non sia modificato dall'azione di corpi circostanti ; 3) l'Ottica, e in generale lo studio delle radiazioni, ove la retta si presenta come *raggio* o linea di simmetria del fenomeno, in un qualsiasi mezzo ambiente, che, mediante determinate esperienze di confronto, possa ritenersi *omogeneo*. I fenomeni 1) e 3) sono percepiti rispettivamente dal tatto e dalla vista ; il 2) è avvertito piuttosto dal senso muscolare. Formulando, riguardo alle parallassi, l'ipotesi anzidetta, dovremmo ragionare così ; se riteniamo di dover mantenere la retta euclidea, come l'ente astratto meglio coordinabile a diversi ordini di fenomeni fisici, attribuendo i suddetti supposti risultati di misurazioni di parallassi a particolari cause fisiche (non omogeneità, per es. di mezzi), allora sarà la geometria euclidea quella più atta ad essere applicata al mondo fisico : diremo in tal caso che lo spazio fisico (nell'accezione da noi data a queste parole : corpi, campi, fenomeni) non ha curvatura, è piano. Se, invece, riteniamo di attribuire ai fenomeni ottici un valore preminente, in ordine alla scelta di un ente geometrico fondamentale, considerando rigorosa la legge di percorso rettilineo dei raggi luminosi, allora sarà la

retta non euclidea, sarà la geometria non euclidea quella più atta ad essere coordinata ai fenomeni fisici: diremo quindi che lo spazio fisico ha una curvatura, senza omettere di osservare che tale curvatura ha un significato relativo a quella geometria ordinaria che, diciamo, curvatura non ha. Per renderci meglio conto di questo, riferiamoci ancora una volta al mondo non euclideo di Poincaré (cap. VI): nella figura a sinistra della Tav. X noi chiamiamo curvo l'arco *HmB* e retta la linea *HB*. Un abitante di quel mondo, però, associando l'idea di segmento rettilineo all'idea di linea più breve congiungente due punti (cioè il cammino più rapido), sarà indotto a chiamare rettilineo l'arco *HmB* e curvo il segmento *HB*. Nel nostro mondo, che diciamo euclideo perchè il postulato di Euclide ci appare con una «certa evidenza», chiamiamo retta la retta euclidea; un abitante del mondo di Poincaré chiamerà retta una linea, che noi chiamiamo curva; ma questa curva, in rapporto a quel mondo e in rapporto ai movimenti che quell'abitante chiamerà movimenti senza deformazione, gode delle stesse proprietà di cui gode la nostra retta euclidea nel nostro mondo. Il concetto di curvatura è legato, pertanto, alla nostra esperienza ordinaria, che ci induce a chiamare retta la retta euclidea e curva la retta non euclidea. Dobbiamo quindi concludere che chiameremo curvo lo spazio fisico al quale ci appare più semplice coordinare gli enti geometrici di una geometria non euclidea. Se ritenessimo che, tra i fenomeni della natura, quello più imponente e più atto a suggerirci la linea più breve congiungente due punti fosse la traiettoria del raggio luminoso e se tali traiettorie risultassero, da misurazioni di parallassi, non rettilinee nel senso euclideo della parola, *ipso facto* assumeremmo come linea retta una retta non euclidea e diremmo che lo spazio fisico, secondo quanto diciamo sopra, ha una curvatura, oppure, ciò che è lo stesso, che non è euclideo. Tutto ciò non ha nulla di sibillino, nè di misterioso. Il mistero nasce quando si afferma l'esistenza di uno spazio fisico in sè, indipendente dalle cose: questo spazio può essere immaginato, sebbene in maniera illusoria, da chi non avverte che, laddove sembra esistere il vuoto, esistono campi, perchè, come dice Einstein, «non esiste spazio vuoto di campo»; in ogni caso tale idea di spazio, quantunque, come diciamo, illusoria, sarà quella di uno spazio ordinario, piano, privo, cioè, di caratteristiche. Il mistero, dicevamo, nasce quando si cerca di immaginarsi uno spazio curvo! Ogni difficoltà, però, svanisce, impostando il problema nei suoi giusti termini. Se nella Relatività Generale, invece di dire sibillinamente che «la materia incurva lo spazio», si dicesse che, in vicinanza di grandi masse, i raggi luminosi, essendo ponderabili e

quindi suscettibili di essere attratti da dette masse, percorrono traiettorie non rettilinee, nel senso euclideo della parola, lo svantaggio di dover usare un maggior numero di parole verrebbe largamente compensato dal fatto di rendere comprensibile uno degli aspetti più importanti della Relatività Generale. « Nel nostro universo, scrive Coleman (23 ; 128), una linea retta è rappresentata dal cammino seguito da un raggio di luce. Se questo segue un percorso molto lontano da ogni massa gravitazionale, non risente alcuna influenza ; ma, se passa vicino ad una di queste, sarà incurvato o deviato verso di essa. Perciò si dice che lo spazio stesso è " curvo " ; di qui l'origine di termini come *curvatura dello spazio* e simili. Non si immagini che lo spazio sia curvo nel senso letterale della parola, ma solo nel senso che contiene masse gravitazionali (stelle ed altri sistemi planetari simili al nostro) che determinano una curvatura dei raggi di luce nelle loro vicinanze ». Concordo con il prof. Coleman, rilevando solo una inesattezza : essendo lo spazio fisico niente altro, come abbiamo detto, che la totalità dei corpi, dei campi e dei fenomeni naturali che questi comportano, parlare di spazio che « contiene » masse gravitazionali, ecc. induce in errori concettuali, che abbiamo più volte sottolineato. Ma su questo argomento torneremo minuziosamente più avanti. Concludiamo questo capitolo insistendo sul fatto che, asserendo che lo spazio (fisico) è « curvo » o che vi è « curvatura dello spazio » (termini, che, per brevità, continueremo ad usare), intendiamo dire che nel mondo della natura fenomeni rilevanti suggeriscono di assumere come ente astratto della geometria, da coordinare con i fenomeni stessi, la retta non euclidea, cioè una geometria non euclidea, uno spazio geometrico a curvatura diversa da zero, costante o variabile ; la scelta di tale geometria dipende dai fenomeni, che ci proponiamo di descrivere, e sceglieremo, pertanto, quegli enti e quegli assiomi geometrici che a quei fenomeni possono essere più semplicemente coordinati.

CAPITOLO IX.

Grandezze e procedimenti di misura su piccola scala, su scala ordinaria e su grande scala.

Significato di « grandezza » e di « misura » – Complessità del procedimento di misura di oggetti su scala ordinaria e su grande scala – Misure di oggetti animati da grandi velocità – Misure mediante il teodolite – La celebre misura geodetica di Gauss e la sua effettiva portata – Misure di lunghezza microscopiche e ultramicroscopiche e loro grado di determinatezza.

Nel capitolo precedente abbiamo visto cosa debba intendersi per spazio (fisico) euclideo o piano e per spazio (fisico) non euclideo o curvo. L'indagine sulla natura euclidea o non euclidea dello spazio reale si effettua mediante procedimenti di misura, che implicano inevitabili errori di osservazione; i risultati delle misure sperimentali non possono mai attingere la precisione dei teoremi della geometria. Si tratterà di approssimazioni di ordine anche molto elevato, ma, tuttavia, sempre di approssimazioni. Dopo il minuzioso esame, che abbiamo fatto, dei rapporti tra Fisica e Geometria, non riteniamo che sia il caso di insistere sulla loro vera natura. Ma qui dobbiamo esaminare più da vicino cosa debba intendersi per grandezza e relativa misura, quale sia la natura del rapporto esistente fra il mondo reale e le operazioni da noi effettuate per descriverlo quantitativamente.

Bridgman ha studiato accuratamente questo punto. Egli ha esaminato le operazioni che dobbiamo compiere per misurare la lunghezza di un oggetto fisico concreto (16 ; 28) : « Prendiamo un regolo misuratore, lo appoggiamo sull'oggetto in modo che uno dei suoi estremi coincida con un estremo dell'oggetto, segniamo sull'oggetto la posizione dell'altro estremo del regolo, poi muoviamo il regolo lungo il prolungamento in linea retta della sua posizione precedente, finchè il primo estremo coincida con la precedente posizione del secondo estremo; ripetiamo questo processo quante volte possiamo e chiamiamo lunghezza il numero totale di volte che il regolo è stato applicato. Questo

procedimento, in apparenza così semplice, in pratica è assai complicato, e senza dubbio una descrizione completa di tutte le precauzioni da prendere occuperebbe un grosso trattato. Per es., dobbiamo essere sicuri che la temperatura del regolo è la temperatura standard alla quale è definita la sua lunghezza, altrimenti dobbiamo fare una correzione; dobbiamo correggere la deformazione del regolo dovuta alla gravità, se misuriamo una lunghezza verticale; dobbiamo esser certi che il regolo non è un magnete e non è soggetto a forze elettriche... Dobbiamo considerare gli spostamenti del regolo, il suo preciso percorso e la sua velocità e accelerazione da una posizione all'altra. In pratica non si parla di tali precauzioni, perchè variazioni di tal genere non influiscono (sensibilmente, aggiungiamo noi) sul risultato finale. Dobbiamo, però, sempre riconoscere che tutta la nostra esperienza è suscettibile di errori e che in avvenire ci può capitare di dover specificare più accuratamente, per es., l'accelerazione del trasporto del regolo dall'una all'altra posizione, se la precisione sperimentale aumenterà al punto di mostrare un'influenza misurabile. *In linea di principio*, le operazioni mediante cui si misura la lunghezza dovrebbero essere specificate in modo *unico*. Se abbiamo più di un gruppo di operazioni, abbiamo più di un concetto e a rigore dovremmo dare un nome distinto ad ogni differente gruppo di operazioni». Tutto ciò si riferisce ad oggetti fermi rispetto all'operatore. Le cose non mutano sensibilmente quando dobbiamo misurare corpi animati da piccole velocità. Ma se vogliamo misurare la lunghezza di corpi molto veloci (stelle o particelle atomiche) dobbiamo ricorrere ad altre operazioni. Nei capitoli, in cui tratteremo la Teoria della Relatività, vedremo più minuziosamente questo punto. Ora osserveremo solo che, poichè, per siffatte misure, si applicano altre operazioni, la lunghezza di uno dei corpi in rapido movimento rispetto all'osservatore non ha più lo stesso significato della lunghezza di un corpo solidale con l'osservatore stesso. « Una grandezza fisica, scrive Persico (71, *a*; 355) è definita dal procedimento che serve a misurarla ». Alla grandezza « lunghezza » quindi non corrisponde un solo significato, ma tanti significati quanti sono i gruppi di operazioni che bisogna effettuare per definirla. Il concetto di lunghezza, pertanto, si estende, oltre il dominio dell'esperienza ordinaria, verso le alte velocità.

Vediamo ora quali operazioni sono necessarie per misurare oggetti molto grandi, per es., vaste estensioni di terreno. Per tali misure occorre il teodolite. Bisogna stendere sulla superficie del terreno un sistema di coordinate, partendo da una linea di base misurata, ad es., con un nastro, traguardando punti lontani dalle estremità della linea di base e misu-

rando gli angoli relativi. Questa operazione implica un mutamento essenziale di procedimento. Mentre prima esaminavamo oggetti a noi prossimi, oggetti dello spazio tattile, dello spazio ordinario ed effettuavamo quindi misure su scala ordinaria, ora passiamo ad esaminare oggetti dello spazio ottico per misurare su grande scala. L'uso del teodolite implica la misura di angoli tra linee colleganti punti lontani, essendo questi angoli formati da linee rette, che sono raggi di luce. «Compare l'ipotesi, scrive Bridgman (16; 32), che un raggio di luce viaggi in linea retta; inoltre, nell'estendere il nostro sistema di triangolazione sulla superficie della terra, supponiamo che la geometria dei raggi di luce sia euclidea». Gauss effettuò nel 1848 una celebre misura, per decidere sulla natura euclidea o non euclidea dello spazio fisico; egli ne parla nelle sue « Disquisitiones circa superficies curvas ». Il triangolo geodetico, di cui egli misurò gli angoli, era il triangolo compreso tra le vette dei tre monti Bröcken, Hohehagen e Jnselberg, i cui lati sono circa km. 69, 85 e 197. Gauss esaminò se gli angoli di siffatto triangolo avessero per somma un angolo piatto e, nei limiti degli errori sperimentali, tale fu il risultato delle sue misure. Bridgman annota che, in accordo con gli esperimenti di Michelson, « se le misure di Gauss fossero state abbastanza precise, egli non avrebbe trovato un accordo, ma avrebbe trovato un eccesso o un difetto, a seconda della direzione in cui il raggio di luce viaggiava, lungo il perimetro del triangolo, rispetto alla rotazione della Terra. Ma se la geometria dei raggi di luce è euclidea, non soltanto la somma degli angoli di un triangolo deve essere un angolo piatto, ma si devono avere relazioni ben definite fra le lunghezze dei lati e gli angoli, e, per controllare queste relazioni, i lati dovrebbero venir misurati con il vecchio procedimento del regolo. Un controllo su larga scala di questo genere non è stato mai tentato e non è realizzabile » (16; 32). Osserviamo inoltre che siffatto controllo, se, per assurda ipotesi, fosse realizzabile, presupporrebbe uno spazio piano o a curvatura costante, nel quale i movimenti dei corpi sono rigidi, cioè i corpi, durante il moto, non si deformano. Se lo spazio fosse a curvatura variabile un controllo con i regoli, come quello accennato, non avrebbe alcun valore. Ma diciamo di più: il fatto che la somma degli angoli di un triangolo sia un angolo piatto assicura che siamo in uno spazio euclideo solo nel caso che i lati siano rettilinei, nel senso euclideo, perchè, se non è soddisfatta quest'ultima ipotesi, potremmo anche avere per somma un angolo piatto e uno spazio non euclideo. Conosciamo la trasformazione per raggi vettori reciproci (di cui molto estesamente dovremo occuparci più avanti): ebbene, un triangolo euclideo diviene, nella trasformazione, un triangolo a lati

curvilinei, ma sia il triangolo euclideo che quello trasformato hanno per somma un angolo piatto, essendo detta trasformazione caratterizzata dalla invarianza degli angoli (la trasformazione è *conforme*). La misura effettuata da Gauss, pertanto, anche se, ovviando, in via d'ipotesi, agli inevitabili errori di osservazione, avesse dato come risultato della misura degli angoli del triangolo geodetico un angolo piatto « *esatto* », non avrebbe provato affatto l'euclideità dello spazio fisico, salvo ad ammettere, prima ancora di effettuare tale misura, che lo spazio fosse euclideo! Un circolo vizioso! Anche uno spazio non euclideo, ripetiamo, che rispecchiasse determinate leggi geometriche (come quelle anzidette della trasformazione circolare), avrebbe potuto fornire per la somma degli angoli del triangolo misurato un angolo piatto. Di ciò tratteremo ancora nel cap. III, Parte III.

È noto, poi, che l'eccesso *percentuale* degli angoli di un triangolo non euclideo rispetto ai 180° dipende dalla grandezza del triangolo; quindi, anche prescindendo da quanto diciamo sopra, nei nostri controlli sulla natura dello spazio può sempre accadere che non abbiamo rilevato il carattere non euclideo dello spazio solo perchè le nostre misure non sono state effettuate su una scala sufficientemente ampia. Non ci soffermiamo, per brevità, sulle difficoltà e precauzioni da prendere per le misure, oltrechè trigonometriche, bolometriche, e per quelle da eseguirsi con altri delicati strumenti per il calcolo dei diametri, distanze, ecc. degli astri. Rimandiamo il lettore ai cap. XII e XIII, dove parleremo di siffatti procedimenti di misura, circa i quali così commenta Bridgman (16; 35): « Una conseguenza particolare della imprecisione delle misure astronomiche a grande distanza è che la questione se lo spazio su grande scala sia o non sia euclideo risulta puramente accademica ».

Quando passiamo al campo delle piccole distanze dobbiamo modificare i nostri procedimenti di misura. Fino alla scala delle dimensioni microscopiche una estensione diretta dei procedimenti ordinari di misura è sufficiente, come quando misuriamo una lunghezza nell'oculare micrometrico di un microscopio. Si tratta di una combinazione di misure tattili ed ottiche e bisogna introdurre certe ipotesi, giustificate per quanto possibile dall'esperienza, circa il comportamento dei raggi di luce, per le difficoltà inerenti agli effetti di interferenza e non riguardanti l'eventuale curvatura dei raggi luminosi su scala astronomica. Prescindendo dalla questione della convenienza, potremmo anche misurare le piccole distanze mediante il metodo tattile. A mano a mano che le dimensioni diventano più piccole, difficoltà, che su grande scala

sarebbero trascurabili, diventano importanti. È difficile elencare esplicitamente tutte le precauzioni da prendere. Per misurare la lunghezza con il metodo tattile, mediante i calibri di Johansson (campioni di piccole grandezze), nell'affiancarli l'uno all'altro, dobbiamo esser sicuri che siano puliti e quindi effettivamente in contatto fra loro. Procedendo verso dimensioni minori dovremo occuparci delle pellicole di umidità, poi delle sostanze gassose assorbite, ecc. Quando le dimensioni sono ancora più piccole, i campioni stessi hanno una struttura atomica, non hanno contorni ben definiti e quindi non hanno una lunghezza definita. Al diminuire delle dimensioni corrisponde un aumentare della indeterminatezza.

Cosa implica, poi, il nostro concetto di lunghezza esteso alle dimensioni ultramicroscopiche? Che significa affermare che la distanza tra i piani di un certo cristallo è $3 \cdot 10^{-8}$ cm.? Significa che $\frac{1}{3} \cdot 10^{8}$ di questi piani danno, sovrapposti l'uno sull'altro, lo spessore di 1 centimetro. Bridgman avverte, però, che questo non è il significato effettivo. Bisogna esaminare le operazioni, mediante le quali siamo giunti al numero $3 \cdot 10^{-8}$. Questo numero è stato ottenuto risolvendo un'equazione generale dedotta dalla teoria ondulatoria della luce, un'equazione in cui sono stati introdotti certi dati numerici ricavati da esperimenti eseguiti con i raggi X. Non solo, quindi, il carattere del concetto di lunghezza si è trasformato da tattile in ottico, ma ci siamo impegnati ancora di più in una teoria ottica ben definita, nonostane le incertezze che gravano sulla correttezza delle nostre teorie ottiche. Dalle dimensioni dell'ordine atomico spingiamoci fino all'elettrone, il cui diametro è dell'ordine di 10^{-13} cm. Che significa affermare che il diametro di un elettrone è 10^{-13} cm.? Anche qui dobbiamo esaminare le operazioni mediante le quali siamo giunti al numero 10^{-13}. Questo numero è stato ottenuto risolvendo certe equazioni, derivanti dalle equazioni di campo della elettrodinamica, nelle quali sono stati introdotti certi dati numerici ricavati dall'esperienza. Il concetto di lunghezza è stato modificato in modo da includere la teoria dell'elettricità implicita nelle equazioni di campo, la cui validità su piccola scala implica la verifica di relazioni imposte dalle equazioni tra le forze elettriche e magnetiche e le coordinate spaziali, per determinare le quali occorrono misure di lunghezza. Bridgman avverte che, se a queste coordinate spaziali non si può dare un significato indipendente al di fuori delle equazioni, non solo risulta impossibile la verifica delle equazioni stesse, ma la questione diventa priva di significato. Si cade in un circolo vizioso. Il concetto di lunghezza

sparisce come cosa indipendente e si fonde in modo complicato con altri concetti. Ciò premesso (16 ; 38) « non si vede come si possa dare significato a questioni quale quella se lo spazio su piccola scala sia euclideo o no ».

Abbiamo riferito le notevoli considerazioni di Bridgman circa il reale significato di « grandezza », di « misura » a seconda che vogliamo valutare lunghezze e distanze su piccola scala o su scala ordinaria o su grande scala. Lo stesso concetto di lunghezza appare particolarmente complesso, e irte di difficoltà si presentano le operazioni per valutare grandezze sia su piccola scala, che su scala ordinaria e su grande scala : siffatte valutazioni implicano certe ipotesi, certe teorie non sempre sufficientemente confermate dalla esperienza. In particolare i procedimenti di verifica circa l'euclideità dello spazio, seguiti da scienziati della statura di Gauss, non sono apparsi accettabili, perchè implicavano ipotesi non verificate e conducevano a circoli viziosi. Le osservazioni e considerazioni qui sopra esposte conferiscono maggiore saldezza alle conclusioni, cui siamo giunti al cap. VII, specialmente per quanto riguarda il problema della natura dello spazio. La questione va posta in termini di struttura fisico-matematica. Nei prossimi capitoli vedremo quali geometrie suggeriscano le esperienze su piccola scala (spazio atomico), su scala ordinaria (spazio ordinario o terrestre) e su grande scala (spazio astronomico).

CAPITOLO X.

Lo spazio atomico.

La meccanica e l'elettromagnetismo classici non sono applicabili allo spazio atomico – Il *quanto* di Planck – Il *fotone* – Successione *discreta* dei raggi delle orbite atomiche – Lo spazio atomico non è euclideo.

Come dicevamo nel capitolo precedente, al concetto di lunghezza, per quanto riguarda le dimensioni dell'ordine atomico e quelle degli elementi (elettroni, nucleo, ecc.) che costituiscono l'atomo, corrisponde un significato diverso da quello ordinario, date le operazioni che occorre effettuare per siffatte valutazioni. Ora tratteremo della natura fisica dell'atomo, al quale non possono applicarsi le leggi classiche della meccanica e dell'elettromagnetismo. Persico scrive (71, *b* ; 19) : « Secondo le leggi dell'elettromagnetismo, una carica elettrica irradia energia elettromagnetica ogni qual volta sia dotata di una certa accelerazione ; quindi un elettrone rotante attorno al nucleo, avendo costantemente una accelerazione centripeta, dovrebbe irradiare continuamente onde elettromagnetiche. Per conseguenza la sua energia dovrebbe gradualmente diminuire, il che porterebbe ad una graduale diminuzione delle dimensioni dell'orbita, finchè l'elettrone finirebbe per cadere sul nucleo. L'atomo di Rutherford non potrebbe dunque avere carattere permanente, e si può calcolare che la sua vita sarebbe dell'ordine di 10^{-8} secondi. Inoltre l'energia sarebbe irradiata sotto forma di radiazioni, la cui frequenza fondamentale coinciderebbe con la frequenza del moto orbitale dell'elettrone ; ma siccome questa andrebbe continuamente variando a causa dell'impicciolimento dell'orbita, la luce emessa avrebbe frequenza variabile : perciò qualsiasi corpo, che contiene innumerevoli atomi in tutte le possibili fasi della loro vita, dovrebbe emettere radiazioni in tutte le possibili frequenze, ossia uno spettro continuo ; è noto invece che i gas emettono spettri di righe e di frequenza rigorosamente costante ». Questi fatti confermano nei fisici la convinzione, già raggiunta per altra via, che la meccanica e l'elettromagnetismo classici non sono applicabili al mondo atomico.

La radiazione emessa ad una data temperatura da un *corpo nero* (un corpo capace di assorbire tutte le radiazioni che riceve, come è, per es., approssimativamente il nerofumo) è indipendente dalla forma e dalla natura del corpo. Analizzata al microscopio tale radiazione mostra uno spettro continuo, la cui intensità, misurata alle varie temperature, punto per punto, presenta un massimo per una certa frequenza e decresce verso zero sia per le alte che per le basse frequenze. La radiazione emessa si ammette sia dovuta alla agitazione termica delle cariche elettriche contenute entro la materia : ma se si tenta di determinare quantitativamente questa idea, applicando le ordinarie leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo, si arriva ad un risultato assurdo, poichè, in luogo della curva sperimentale, si trova una curva parabolica ascendente, rappresentata dalla formula di Rayleigh e Jeans

$$I = \frac{2\pi}{c^2} K T \nu^2 \qquad (8)$$

dove K è la costante di Boltzmann, c la velcità della luce, T la temperatura assoluta ; $I(\nu)\,d\nu$ rappresenta l'energia irradiata dall'unità di superficie nella striscia di spettro fra ν e $\nu + d\nu$. Integrando rispetto a ν, l'energia totale irradiata a qualunque temperatura, diversa dallo zero assoluto, risulterebbe infinita ! Planck impostò il problema supponendo che l'energia variasse non con continuità, ma per salti di una certa grandezza $\varepsilon = h\nu$, che poi faceva tendere a zero, introducendo così la costante h, che da lui prese il nome, e che in unità C.G.S. ha il valore di $6{,}610 \cdot 10^{-27}$. La formula (8), modificata da Planck, si scrive :

$$I = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \qquad (9)$$

che rappresenta esattamente la distribuzione della energia nello spettro del corpo nero per qualunque valore della temperatura T. Planck formulò allora l'ipotesi che, al pari della materia, l'energia avesse una struttura atomica, si presentasse cioè sempre in quantità multiple di una quantità elementare ε, che egli chiamò *quanto*. In contrasto con le ordinarie teorie meccaniche ed elettromagnetiche, entrava nella scienza il concetto di una discontinuità nelle leggi fisiche ; nascevano le teorie *quantistiche*. Un'altra contraddizione veniva rilevata fra certi fatti sperimentali e la teoria ondulatoria della luce da Albert Einstein, il quale enunciò la teoria che l'energia di una radiazione monocromatica non sia uniformemente distribuita su tutto il fronte d'onda, ma viaggi localizzata in granuli, detti da Einstein *quanti di luce* e chiamati

oggi *fotoni*. Nella terza parte di questo lavoro ci soffermeremo sulle teorie della luce. Qui bastano questi pochi cenni per giungere alla notevole conclusione che lo spazio atomico non è euclideo, nel senso da noi già dato alle parole « spazio fisico ». In altri termini l'esperienza ci mostra fenomeni che sono in contrasto con l'omogeneità dello spazio euclideo. Da Newton in poi le leggi naturali vengono espresse sotto forma di equazioni differenziali, che sono *continue*. Un'equazione differenziale contiene l'idea di *variazione*, che avviene con *continuità*. «L'atomo *in se stesso* non è un differenziale, scrive Carlson (19 ; 368), esso *si muove* soltanto secondo equazioni differenziali. Un atomo che cade soddisfa alle equazioni di Newton nè più nè meno che la Terra od il Sole. Ma l'atomo e il concetto di campo sono incompatibili. L'atomo, al contrario del campo, *non si può rappresentare con una equazione differenziale*. I due concetti non coincidono... Nell'interno dell'atomo lo spazio non è uniforme, non gode di facoltà uguali dappertutto. Certe determinate orbite sono privilegiate, sono possibili, le altre non lo sono. Tutto avviene come se vi fossero dei binari, delle vie preparate per gli elettroni, sui quali questi potessero correre liberi ed indisturbati ; fuori di quelle strade lo spazio si presenta impraticabile ». Bohr ammise che nella Meccanica Atomica esistesse una condizione, per cui il movimento è possibile non su tutti i cerchi ammessi dalla Meccanica ordinaria, ma soltanto su alcuni di essi, che si chiamano *orbite stabili* o *orbite quantiche*, i cui raggi costituiscono una successione infinita ma *discreta* (cioè non continua). L'energia dell'atomo può assumere solo certi valori *discreti*, detti *livelli energetici*. Alla Meccanica Atomica di Bohr e Sommerfeld seguì la moderna Meccanica Quantistica, in cui quella può considerarsi inclusa come forma approssimata. Ma su questo argomento non ci occorre dire di più. Ciò che vogliamo rilevare è questo : i fenomeni atomici hanno suggerito certe relazioni matematiche atte a descriverli, rispecchianti condizioni spaziali non euclidee. In questo senso, secondo le nostre precedenti conclusioni sul significato da attribuire alle parole « spazio euclideo o non euclideo », diciamo che lo spazio atomico non ha la natura dello spazio ordinario, non è omogeneo, non è euclideo. L'impossibilità di applicare agli oggetti, che costituiscono l'atomo, le leggi della Meccanica classica significa non potere applicare ad essi la geometria euclidea su cui quelle si fondano.

oggi *fotoni*. Nella terza parte di questo lavoro ci soffermeremo sulle teorie della luce. Qui bastano questi pochi cenni per giungere alla notevole conclusione che lo spazio atomico non è euclideo, nel senso da noi già dato alle parole «spazio fisico». In altri termini l'esperienza ci mostra fenomeni che sono in contrasto con l'omogeneità dello spazio euclideo. Da Newton in poi le leggi naturali vengono espresse sotto forma di equazioni differenziali, che sono *continue*. Un'equazione differenziale contiene l'idea di gradazione, che avviene con *continuità*. «L'atomo in se stesso non è un differenziale, scrive Carlson (10 ; 368), esso si muove soltanto secondo equazioni differenziali. Un atomo che cade soddisfa alle equazioni di Newton nè più nè meno che la Terra od il Sole. Ma l'atomo e il concetto di campo sono incompatibili. L'atomo, al contrario del campo, *non si può rappresentare con una equazione differenziale*. I due concetti non coincidono... Nell'interno dell'atomo lo spazio non è uniforme, non gode di facoltà uguali dappertutto. Certe determinate orbite sono privilegiate, sono possibili, le altre non lo sono. Tutto avviene come se vi fossero dei binari, delle vie preparate per gli elettroni, sui quali questi potessero correre liberi ed indisturbati; fuori di quelle strade lo spazio si presenta impraticabile». Bohr ammise che nella Meccanica Atomica esistesse una condizione, per cui il movimento è possibile non su *tutti* i cerchi ammessi dalla Meccanica ordinaria, ma soltanto su alcuni di essi, che si chiamano *orbite stabili* o *orbite quantiche*, i cui raggi costituiscono una successione infinita ma *discreta* (cioè non continua). L'energia dell'atomo può assumere solo certi valori discreti, detti *livelli energetici*. Alla Meccanica Atomica di Bohr e Sommerfeld seguì la moderna Meccanica Quantistica, in cui quella può considerarsi inclusa come forma approssimata. Ma su questo argomento non ci occorre dire di più. Ciò che vogliamo rilevare è questo: i fenomeni atomici hanno suggerito certe relazioni matematiche atte a descriverli, rispecchianti condizioni spaziali non euclidee. In questo senso, secondo le nostre precedenti conclusioni sul significato da attribuire alle parole «spazio euclideo o non euclideo», diciamo che lo spazio atomico non ha la natura dello spazio ordinario, non è omogeneo, non è euclideo. L'impossibilità di applicare agli oggetti, che costituiscono l'atomo, le leggi della Meccanica classica significa non potere applicare ad essi la geometria euclidea su cui quelle si fondano.

CAPITOLO XI.

Lo spazio ordinario o terrestre.

Lo spazio terrestre, entro un certo ordine di approssimazione, può riguardarsi come euclideo – Bridgman: la propagazione rettilinea della luce è un'ipotesi – I corpi e i relativi moti, in buona approssimazione, possono considerarsi rigidi.

Sulla natura dello spazio ordinario o terrestre, o, più precisamente, sulla scelta, operata per intuizione e per astrazione, della Geometria che meglio si presti a descrivere i comuni oggetti e fenomeni dello spazio ordinario, già ci siamo indugiati in precedenza. Nel cap. VIII abbiamo esaminato i fenomeni che ci suggeriscono l'idea di retta euclidea: 1) il movimento dei corpi *solidi*, nei quali l'*asse di rotazione* è costituito da una *linea retta* i cui punti restano immobili durante il movimento; 2) la Dinamica dei *punti materiali*, nella quale la *traiettoria* di un punto, il cui moto non sia alterato dall'azione di altri corpi, si presenta come *linea retta*; 3) l'ottica, e, in generale, lo studio delle radiazioni, ove un *raggio* o linea di simmetria del fenomeno, in un mezzo omogeneo, si presenta come *linea retta*. Osserviamo subito che i fenomeni su scala ordinaria suggeriscono la linea retta euclidea in un ordine di approssimazione che supera la precisione delle misure fornite dai nostri strumenti più perfezionati. Le più accurate misure dei triangoli sulla superficie terrestre danno, come quello considerato da Gauss (cap. IX), una « verificazione sensibile » [come impropriamente si esprime Enriques (32, *b*; 168)] della geometria euclidea, a meno degli errori di osservazione. Anche ammettendo, per assurdo, che Gauss fosse riuscito ad ovviare agli errori di osservazione, la constatazione che la somma degli angoli interni di un triangolo fosse un angolo piatto avrebbe « verificato » la geometria euclidea, come già dicemmo, solo partendo da « l'ipotesi, rilevata da Bridgman (16; 32), che un raggio di luce viaggi in linea retta ». Bridgman scrive ancora (16, 48): « Come conseguenza generale del carattere approssimato di tutte le misure, si ha che nessuna scienza empirica può

mai formulare affermazioni esatte... ; la geometria, cui noi siamo interessati come fisici, rappresenta un soggetto empirico ; nessuno può dire che lo spazio reale è euclideo : si può solo dire che esso si avvicina, con un certo grado di approssimazione, allo spazio euclideo ideale ». Convengo con Bridgman, con Enriques ed altri che lo spazio terrestre *può riguardarsi* come euclideo, ma reputo che siffatta affermazione non va disgiunta dall'altra e cioè che si ammette, per ipotesi, la propagazione rettilinea della luce. Nella terza parte di questo lavoro tratteremo a lungo di tale argomento : vedremo, in particolare, quanto sia giustificata l'affermazione di Bridgman che la rettilineità della luce è solo una ipotesi, non un fatto. Pertanto l'affermazione che lo spazio possa riguardarsi come euclideo poggia in definitiva su una ipotesi, su una fondamentale ipotesi, chiave di volta delle interpretazioni di fenomeni osservati, che conducono a riguardare, appunto, lo spazio come euclideo. Nel prossimo capitolo parleremo dello spazio astronomico, ma diciamo subito che anche quello può riguardarsi come euclideo sulla base dell'ipotesi della propagazione rettilinea della luce. Dovremo a lungo trattare di questa questione, ma vogliamo rilevare fin da adesso una circostanza importante : lo spazio terrestre e lo spazio astronomico, se formuliamo l'ipotesi di propagazione del raggio luminoso lungo geodetiche non euclidee (cioè lungo traiettorie curve nel senso euclideo), non potranno ovviamente riguardarsi come euclidei ; tuttavia, in relazione alla ipotesi che formuleremo, le curvature dei raggi luminosi saranno lievi nello spazio terrestre, accentuandosi sempre di più a misura che si considerino spazi più lontani, su grande scala (spazio astronomico). Ciò significa che lo spazio terrestre, anche con la nuova ipotesi, potrà *praticamente* riguardarsi come euclideo ; non così lo spazio astronomico. Tutto questo ho ritenuto conveniente anticipare, riservandomi, come ho detto, di trattarne diffusamente più avanti. L'esperienza ordinaria, a meno degli errori di osservazione, ci mostra che i corpi (solidi) sono animati da movimenti rigidi ; questo dice che lo spazio fisico ha curvatura costante, nulla o diversa da zero. Altre esperienze, di cui abbiamo parlato, ci inducono a considerare nulla siffatta curvatura costante. Pertanto i movimenti rigidi dell'ordinaria esperienza confermano la nostra convenienza ad assumere la geometria euclidea come quella più atta a descrivere i fenomeni dello spazio ordinario. « La geometria euclidea, scrive Poincaré (74, *a* ; 59), si accorda assai bene con le proprietà dei solidi naturali, di questi corpi che noi tocchiamo e vediamo, e con i quali costruiamo i nostri strumenti di misura ». Naturalmente anche

qui dobbiamo parlare di un certo ordine di approssimazione, perchè, come scrive Persico (71, *a*; 189), «è noto che i corpi solidi non sono mai perfettamente rigidi, come conviene spesso considerarli in Meccanica ». Che i corpi (solidi) siano soggetti a movimenti rigidi è, pertanto, anche questa, una ipotesi. Con buona approssimazione in ordine alle esperienze ordinarie possiamo quindi concludere che lo spazio terrestre è euclideo, cioè che alle esperienze e ai fenomeni dello spazio ordinario o terrestre conviene coordinare la geometria euclidea.

qui dobbiamo parlare di un certo ordine di approssimazione, perché, come scrive Persico (71, *a*; 189), «è noto che i corpi solidi non sono mai perfettamente rigidi, come conviene spesso considerarli in Meccanica»; che i corpi (solidi) siano soggetti a movimenti rigidi è, pertanto, anche questa, una ipotesi. Con buona approssimazione in ordine alle esperienze ordinarie possiamo quindi concludere che lo spazio terrestre è euclideo, cioè che alle esperienze e ai fenomeni dello spazio ordinario o terrestre conviene coordinare la geometria euclidea.

rettilinea della luc[illegible] lungo di tale argomento; vedremo, in particolare, quanto sia giustificata l'affermazione di Bridgman che la rettilineità della luce è solo una ipotesi, non un fatto. Pertanto l'affermazione che lo spazio possa riguardarsi come euclideo poggia in definitiva su una ipotesi, su una fondamentale ipotesi, chiave di volta delle interpretazioni di fenomeni osservati, che conducono a riguardare, appunto, lo spazio come euclideo. Nel prossimo capitolo parleremo dello spazio astronomico, ma diciamo subito che anche quello può riguardarsi come euclideo sulla base dell'ipotesi della propagazione rettilinea della luce. Dovremo a lungo trattare di questa questione, ma vogliamo rilevare fin da adesso una circostanza importante: lo spazio terrestre e lo spazio astronomico, se formuliamo l'ipotesi di propagazione del raggio luminoso lungo geodetiche non euclidee (cioè lungo traiettorie curve nel senso euclideo), non potranno ovviamente riguardarsi come euclidei; tuttavia, in relazione alla ipotesi che formuleremo, le curvature dei raggi luminosi saranno lievi nello spazio terrestre, accentuandosi sempre di più a misura che si considerino spazi più lontani, su grande scala (spazio astronomico). Ciò significa che lo spazio terrestre, anche con la nuova ipotesi, potrà *praticamente* riguardarsi come euclideo; non così lo spazio astronomico. Tutto questo ho ritenuto conveniente anticipare, riservandomi, come ho detto, di trattarne diffusamente più avanti. L'esperienza ordinaria, a meno degli errori di osservazione, ci mostra che i corpi (solidi) sono animati da movimenti rigidi; questo dice che lo spazio fisico ha curvatura costante, nulla o diversa da zero. Altre esperienze, di cui abbiamo parlato, ci inducono a considerare nulla siffatta curvatura costante. Pertanto i movimenti rigidi dell'ordinaria esperienza confermano la nostra convenienza ad assumere la geometria euclidea come quella più atta a descrivere i fenomeni dello spazio ordinario. «La geometria euclidea, scrive Poincaré (74, *a*; 59), si accorda assai bene con le proprietà dei solidi naturali, di questi corpi che noi tocchiamo e vediamo, e con i quali costruiamo i nostri strumenti di misura». Naturalmente anche

CAPITOLO XII.

Lo spazio astronomico.

Lo spazio astronomico è di tipo ottico – Impossibilità di confrontare in esso lo spazio tattile con quello ottico – Sandage: l'astronomo non può eseguire esperienze *dirette* su quello che è l'oggetto dei suoi studi – Si estrapolano allo spazio astronomico i caratteri euclidei dello spazio ordinario – Bridgman: per grandi distanze stellari si è condotti a stime molto rozze; la precisione dell'astronomia è assai ristretta come dominio – Armellini: le formule dell'Astronomia si basano sull'*ipotesi* che lo spazio sia euclideo – Non vi sono fenomeni o esperimenti *direttamente controllabili*, che suggeriscano un determinato tipo di Geometria per descriverli.

Abbiamo visto che il concetto di lunghezza ha subito, anche nell'ambito delle misure terrestri, (per es. quella effettuata da Gauss), un cambiamento essenziale. «Abbiamo sostituito, scrive Bridgman (16; 33 e 74), a ciò che possiamo chiamare il concetto tattile un concetto ottico, complicato da una ipotesi sulla natura della nostra geometria. Da un concetto assai diretto siamo passati a un concetto assai indiretto con un gruppo complicatissimo di operazioni. A rigore la lunghezza misurata in questo modo, mediante raggi di luce, dovrebbe venir chiamata con un altro nome, dato che le operazioni sono diverse... Le cose vanno ancor peggio quando vogliamo valutare le distanze solari e stellari. In questo caso lo spazio è di tipo ottico, e non abbiamo alcuna occasione di confrontare, sia pure parzialmente, lo spazio tattile con quello ottico. Non sono mai state fatte misure di lunghezza, nè possiamo misurare i tre angoli di un triangolo per controllare la nostra ipotesi che sia giustificato l'uso della geometria euclidea nell'estendere il concetto di spazio. Non abbiamo mai sotto osservazione più di due degli angoli di un triangolo, per es. quando misuriamo la distanza della Luna osservandola dai due estremi del diametro terrestre. Per estendere a distanza ancora maggiore le nostre misure di lunghezza, dobbiamo introdurre nuove ipotesi, quale quella che sia ancora valida ogni conseguenza delle leggi newtoniane della meccanica. La precisione delle

nostre deduzioni circa le lunghezze ricavate con tali misure non è molto grande. La astronomia viene considerata di solito come una scienza di grandissima precisione, ma la sua precisione è assai ristretta come dominio, in quanto copre soltanto le misure angolari. Probabilmente è lecito dire che nessuna distanza astronomica, eccetto forse quella della Luna, è nota con una precisione superiore allo 0,1 %. Quando spingiamo i nostri calcoli a distanze al di là dei confini del sistema solare, nei quali siamo assistiti dalle leggi della meccanica, ci riduciamo a misure di parallasse, le quali hanno una precisione decisamente inferiore, e vengono meno se usciamo da un campo piuttosto ristretto. Per distanze stellari più grandi siamo costretti a stime molto più rozze, contando, per esempio, sulla estrapolazione a grandi distanze delle relazioni trovate, nel campo delle parallassi, tra luminosità e tipo spettrale di una stella, oppure su ipotesi del genere di quella, secondo cui, siccome un gruppo di stelle si presenta come se esse fossero vicine nello spazio e avessero un'origine comune, le cose stanno effettivamente così. Pertanto a distanze sempre più grandi non solo la precisione sperimentale diviene minore, ma la natura stessa delle operazioni, mediante cui va determinata la lunghezza, diventa indefinita, di modo che le distanze degli oggetti stellari più lontani risultano assai divergenti a seconda dell'osservatore che le ha calcolate o del modo impiegato. Una conseguenza particolare dell'imprecisione delle misure astronomiche a grande distanza è che la questione se lo spazio su grande scala sia o non sia euclideo risulta puramente accademica. Il concetto di lunghezza, esteso dalle distanze terrestri alle grandi distanze stellari, ha cambiato completamente carattere. Dire che una certa stella dista 10^5 anni-luce è effettivamente e concettualmente una cosa di genere interamente diverso dal dire che un certo palo è distante 10 metri... Dicendo che lo spazio è euclideo, intendiamo dire che lo spazio fisico dei regoli misuratori è euclideo : non ha senso chiedersi se lo spazio vuoto sia euclideo... Lo spazio dell'astronomia non è uno spazio fisico di regoli graduati, bensì uno spazio di onde luminose... Chiedendoci se lo spazio astronomico è euclideo, intendiamo semplicemente chiedere se quelle caratteristiche dello spazio ottico, che rientrano nel raggio delle misure astronomiche, siano euclidee... Dalla supposta equivalenza fra spazio ottico e spazio tattile consegue che il cammino di un fascio luminoso è rettilineo, la linea retta essendo determinata da operazioni compiute con i regoli. Passando ai fenomeni astronomici, le operazioni fisiche mediante regoli non si possono più effettuare e diventa privo di significato l'attribuire ai raggi luminosi su scala cosmica le stesse proprietà geometriche

che attribuiamo ad essi su scala ordinaria ». Bridgman, pertanto, pone l'accento sull'imprecisione delle misure astronomiche e sul fatto che lo spazio astronomico è di tipo ottico o, se si vuole, elettromagnetico, poichè l'abbiamo, in parte, esplorato con onde e segnali radio di natura, come la luce, elettromagnetica. Questo fatto, implicando l'impossibilità di confrontare lo spazio tattile con lo spazio ottico, non consente obiettivare lo spazio astronomico; in particolare non consente nemmeno una grossolana verifica del quinto postulato di Euclide. Abbiamo visto nel cap. V che detto postulato, alla cui acquisizione, per astrazione, deve concorrere non solo il senso del tatto, ma anche quello della vista, si presentava con minore « evidenza » di altri postulati, per i quali è sufficiente il concorso dell'organo del tatto. Nello spazio astronomico, che è di tipo ottico, il quinto postulato non ha *alcuna « evidenza »*: quello che si fa è attribuire *ipso facto* allo spazio astronomico il carattere che si è ritenuto doversi attribuire allo spazio ordinario. Mentre, come s'è detto, le esperienze abituali suggeriscono, per lo spazio ordinario, i postulati della geometria euclidea, per quanto riguarda lo spazio cosmico non si hanno esperienze, che suggeriscano di assumere questo o quel gruppo di postulati, su cui fondare un edificio geometrico che possa, con le sue relazioni e con i suoi teoremi, applicarsi a tale spazio: per la scelta da fare, apparve naturale, pur non essendo evidente, riconoscere allo spazio astronomico i caratteri dello spazio ordinario. Allo spazio astronomico, cioè ai corpi, ai campi, ai fenomeni fisici, cui, con tali parole, s'intende riferirci, si applicò la geometria euclidea, e i fenomeni cosmici furono interpretati in senso euclideo: al mezzo fu attribuito un carattere di omogeneità e al raggio di luce il comportamento di una retta rigorosamente euclidea (con le lievi correzioni relativiste, di cui parleremo in seguito).

Scrive Allan R. Sandage (81 ; 113): « Un astronomo non può eseguire delle esperienze su quello che è l'oggetto dei suoi studi, e neppure può esaminarlo direttamente. Le sue fonti di osservazione sono i raggi di luce che provengono dallo spazio esterno ». E ciò resta vero anche in seguito ai recenti esperimenti effettuati mediante il lancio di razzi spaziali, come vedremo nel cap. XV, Parte III.

Pur mancando l'appoggio di esperienze dirette che potessero giustificare l'attribuzione allo spazio astronomico del carattere attribuito allo spazio ordinario, tuttavia tale carattere gli fu attribuito per pura estrapolazione. Data l'importanza di questo fatto, ci accingiamo ora ad illustrare i procedimenti matematici, che servono a descrivere i corpi e i fenomeni celesti, rilevando la notevole circostanza che tutte

quelle formule, tutti quei procedimenti sono stati costruiti partendo dall'ipotesi che lo spazio fisico fosse euclideo. Mentre per lo spazio atomico lo strumento matematico si è adeguato ai fenomeni, i cui caratteri presentavano un comportamento (controllabile) non euclideo, per lo spazio astronomico lo strumento matematico è stato costruito in partenza su basi euclidee e la sua adeguatezza o meno ai fenomeni cosmici non è potuta passare al vaglio di un controllo sperimentale. Consideriamo ad es., la formula $M = m + 5 + 5 \log p$, che lega la grandezza visuale assoluta M con la grandezza visuale m degli astri. Essendo m nota dalle osservazioni e ricavandosi M dagli spettri stellari, secondo la teoria di Adams e Kohlschütter, da detta formula risulta immediatamente la parallasse (detta *spettroscopica*), che ci fa conoscere la distanza dell'astro. Parleremo minutamente di ciò nel prossimo capitolo. Ma, per quello che concerne il nostro discorso, riferisco qui quanto rileva Armellini (9, *a*, II ; 79) a proposito di detta formula: «Dobbiamo ricordare che la formula anzidetta è stata ottenuta supponendo che l'intensità luminosa apparente degli astri vari in ragione inversa del quadrato della distanza, ciò che è vero nella duplice ipotesi che lo spazio sia *euclideo* e che non vi sia assorbimento di luce per parte di materie cosmiche diffuse nelle regioni interstellari. Se tali ipotesi non fossero verificate — se per es. si ammette una «*curvatura dello spazio*» — i valori della luminosità L (rapporto tra la quantità totale di luce emessa dall'astro stesso e quella emessa dal Sole) ottenuti da una formula legata alla predetta, e, come questa, costruita in base alla legge di Pogson, potrebbero essere molto diversi dal vero, specialmente per le stelle più lontane». Ma non è soltanto la formula accennata che, come avverte esplicitamente Armellini, si fonda sull'ipotesi dello spazio euclideo. Vedremo che tutte le misure dei volumi, diametri, masse, distanze, densità, temperature, luminosità e velocità del Sole, dei pianeti e delle stelle sono stati ottenuti mediante formule matematiche ed esperienze interpretate in base all'ipotesi che lo spazio sia euclideo, o, più precisamente, anticipando quanto spiegheremo nella Parte III, mediante *formule, dove alle grandezze e alle variabili*, che vi figurano, *vengono attribuiti, per ipotesi, significati euclidei.*

CAPITOLO XIII.

La natura euclidea del mondo classico. Le leggi di Kepler e di Newton. Masse, distanze, volumi, densità, temperature e velocità degli astri.

L'opera di Kepler: determinazione dell'orbita terrestre; le sue tre celebri leggi – Newton: dalle leggi integrali kepleriane alle leggi differenziali (la legge del moto e la legge della Gravitazione Universale) – L'equazione fondamentale della Teoria delle orbite – Il calcolo dei diametri, dei volumi, delle masse e delle densità della Terra, del Sole e dei pianeti – Parallasse diurna – Metodo trigonometrico – L'unità astronomica – La legge di Bode – Parallasse annua – Metodi per la determinazione delle parallassi stellari: metodo dinamico o delle stelle binarie, metodo spettroscopico, metodo delle Cefeidi o fotometrico – Valutazione dei diametri, dei volumi e delle densità stellari – Velocità degli astri – Effetto Doppler – Stelle, nebule (galattiche ed extragalattiche) ed ammassi globulari – Parseo e metaparseo – Le estrapolazioni.

Alla base di tutti i calcoli astronomici sta l'ipotesi che lo spazio sia *euclideo* e, precisamente, che le grandezze e le variabili, che figurano nelle formule matematiche, abbiano significato euclideo. È quanto vedremo, esaminando la struttura delle formule matematiche utilizzate per detti calcoli e le ipotesi su cui esse poggiano. Non sarà inutile, tuttavia, rilevare che l'idea che lo spazio fisico sia euclideo fino a non molti decenni or sono non era considerata una ipotesi, ma era ritenuta un dato di fatto: la possibilità di uno spazio non euclideo non era neppure sospettata. Solo con l'avvento delle geometrie non euclidee, apparse nel secolo scorso, è sorta la domanda se lo spazio fisico fosse euclideo oppure no. E poichè, per la prima volta, nella storia della scienza, appariva possibile più di una teoria circa la natura dello spazio, l'ovvia secolare convinzione che l'euclideità dello spazio fosse un dato di fatto lasciò il posto ad una posizione più prudente: l'euclideità dello spazio divenne una ipotesi, attendibile finchè si volesse, ma pur sempre una ipotesi. Pertanto, fino all'apparire delle opere di Gauss, Lobacevskij, Bolyai e Riemann, non esisteva nemmeno siffatto problema. E vedremo, appunto, che sia gli antichi astronomi, sia Kepler e Newton, effettua-

rono le loro misure e stabilirono le loro leggi su quella che per essi appariva l'unica, ovvia possibilità circa la natura dello spazio. Abbiamo visto nel cap. II come il dubbio che lo spazio fosse euclideo non sfiorasse lo stesso Kant.

Le antiche civiltà immaginarono che la Terra fosse un disco piatto. Gli astronomi greci, osservando che in Grecia la Stella Polare è più alta sull'orizzonte di quanto non lo sia in Egitto, trassero la conseguenza che la Terra fosse rotonda. Nè appariva loro necessario precisare "rotonda-convessa", non concependo essi nemmeno che il raggio luminoso, base delle loro osservazioni, non fosse rettilineo nel senso euclideo. La ragione di questa precisazione la vedremo meglio in seguito.

Copernico (1473-1543) nella sua celebre opera « De revolutionibus orbium coelestium » espose la sua teoria eliocentrica, già ideata da Aristarco di Samo, il « Copernico dell'antichità » (310-230 a. C.), che però non fu compreso nemmeno da Archimede (Arenario I). Il sistema eliocentrico consentiva una soddisfacente spiegazione del movimento apparente dei pianeti, eliminando le oscurità degli eccentri e degli epicicli volti a spiegare l'anomalia nel moto dei pianeti nel sistema tolemaico. La determinazione della natura della traiettoria percorsa dai pianeti fu opera di Kepler (1571-1630). Per capire la difficoltà di siffatto compito, si pensi che non si vede mai dove si trova realmente un pianeta in un determinato momento ; si vede soltanto in quale direzione esso è visto dalla Terra, la quale descrive, essa stessa, una curva di natura tutt'altro che evidente intorno al Sole. Kepler riconobbe che prima di tutto dovevasi determinare il movimento della Terra. Dalle osservazioni solari risultava che la velocità del percorso apparente del Sole, sullo sfondo delle stelle fisse, era diverso nelle varie epoche dell'anno, ma che la velocità angolare di questo moto era sempre uguale nella stessa epoca dell'anno astronomico o sidereo (vero tempo che la Terra impiega a compiere una rivoluzione attorno al Sole) e di conseguenza la velocità di rotazione della linea Terra-Sole, esaminata in rapporto alla medesima regione delle stelle fisse, aveva sempre lo stesso valore. Kepler ne trasse allora la conclusione che l'orbita della Terra *si richiudeva su se stessa* e che la Terra la percorreva ogni anno nello stesso modo. *Questo fatto non era per nulla evidente a priori*. Analogo comportamento si riteneva doversi attribuire anche agli altri pianeti. Ma come determinare la vera forma dell'orbita terrestre ? Ammettiamo, pensava Kepler, che in qualche punto del piano di quest'orbita si trovi una potente lanterna M, fissa nello spazio, atta a costituire, per la determinazione dell'orbita terrestre, una specie di punto fisso di triangolazione, sul quale

poter puntare dalla Terra in ogni epoca dell'anno; ammettiamo inoltre che *M* abbia dal Sole una distanza maggiore della distanza Terra-Sole. Ogni anno vi è un momento in cui la Terra *T* si trova esattamente sulla linea che congiunge il Sole *S* con la lanterna *M*; puntando in questo momento da *T* su *M*, la direzione così ottenuta è anche la direzione *SM*.

Ammettiamo tracciata nel cielo questa direzione. Prendiamo poi in un altro momento un'altra posizione della Terra. Poichè dalla Terra si può osservare egualmente bene il Sole e la lanterna, l'angolo in *T* del triangolo *STM* risulta conosciuto. D'altra parte un'osservazione diretta del Sole dà la direzione *ST*, mentre si è determinata in precedenza, una volta per tutte, la direzione *SM* sullo sfondo delle stelle fisse. Si conosce, così, anche l'angolo in *S*.

Scegliendo a piacere una base *SM*, si può tracciare sulla carta il triangolo *STM*. Ripetendo molte volte detta costruzione si otterrà ogni volta un punto per la Terra *T* in rapporto alla base *SM*, definita, una volta per tutte, corrispondente a una data stabilita.

La forma dell'orbita terrestre sarebbe così determinata empiricamente, ignorandosene tuttavia le dimensioni. Kepler, con il suo genio, trovò nel cielo la lanterna, di cui abbisognava: il pianeta Marte, di cui conosceva la rivoluzione annuale. Ogni anno, ogni due anni, ogni tre anni ecc. marziani (l'anno marziano è di 687 giorni) vi è un momento in cui Sole, Terra e Marte si trovano allineati; *MS* costituisce sempre la stessa base, mentre la Terra si trova, ad ogni nuova osservazione, in un punto diverso della sua orbita. Kepler, facendo tesoro delle numerose osservazioni effettuate da Tycho-Brahe (1546-1601), potè determinare così la vera forma dell'orbita terrestre e le leggi che la governano. Una volta determinata empiricamente l'orbita ter-

restre, Kepler passò a calcolare, con metodo analogo, le orbite e i movimenti degli altri pianeti. Ma non finì qui l'immensa fatica del grande astronomo di Frauenburg: bisognava ora formulare una ipotesi sulla natura matematica della curva e verificarla con il calcolo, confrontando i risultati con i dati noti. Kepler riuscì a trovare una curva, che concordava soddisfacentemente con i dati forniti dalle osservazioni: l'orbita planetaria è una ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi (1ª legge di Kepler); egli trovò ancora la legge di variazione della velocità sull'orbita, secondo la quale la linea pianeta-Sole (raggio vettore) percorre superficie uguali in tempi uguali (2ª legge di Kepler); infine trovò che i quadrati dei tempi di rivoluzione siderea dei pianeti sono approssimativamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi da essi descritti (3ª legge di Kepler). La grande opera di Kepler doveva essere continuata da un altro sommo, Newton (1642-1727). Le leggi di Kepler (forma ellittica dell'orbita, costanza della velocità areale, relazione fra i semiassi maggiori e la durata del percorso) non soddisfano a condizioni di causalità. Le tre leggi sono indipendenti l'una dall'altra, sono prive di interna correlazione. Esse si riferiscono al moto preso nel suo insieme e non alla maniera secondo la quale lo stato del moto di un sistema in un dato momento deriva dallo stato del moto nell'istante immediatamente precedente: in linguaggio matematico possiamo dire che sono leggi integrali e non leggi differenziali. Già Galilei aveva scoperto la legge d'inerzia e quella della caduta dei gravi, ma, mentre tali proposizioni riguardano il moto di un insieme, la legge del moto di Newton dà una risposta alla seguente domanda: come si manifesta lo stato di movimento di un punto materiale, *in un tempo infinitamente piccolo*, sotto l'influenza di una forza esterna? Passando alla osservazione del fenomeno in un tempo infinitamente piccolo (legge differenziale) Newton giunge a stabilire formule matematiche applicabili a qualsiasi moto; introducendo il concetto di massa egli stabilisce il nesso tra forza e accelerazione e nasce la seconda legge della dinamica (o legge del moto):

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \tag{10}$$

che, nel caso particolare di $\mathbf{a} = 0$, esprime la prima legge della Dinamica o legge d'inerzia. Ma questo era solo un primo passo, insufficiente ancora, per stabilire la legge causale dei fenomeni del moto. Era necessario stabilire quale fosse la forza che tale moto causava. Dalla seconda legge di Kepler (legge delle aree) si deduce che la forza, che sollecita i pianeti, è diretta sempre verso il Sole. Indichiamo con m la massa del pianeta P, con c la costante delle aree, con r il raggio vettore

SP e con ϑ l'angolo che SP forma con una qualsiasi direzione fissa. La formula dinamica di Binet [formola che porta il nome di Binet (1786-1856) sebbene fosse già nota a Newton] dice che la forza F, che sollecita P, è data dall'equazione

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2}\right] \tag{11}$$

che esprime l'accelerazione radiale (moltiplicata per la massa m), nel caso dei *moti centrali*, mediante elementi geometrici della traiettoria e la velocità areale (costante). L'accelerazione trasversa (nei moti centrali) è nulla.

Per la prima legge di Kepler, l'orbita di P, prendendo come origine il Sole S, si scrive

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\vartheta - \omega)}{p} \tag{12}$$

dove p indica il parametro dell'ellisse, e la sua eccentricità ed ω una costante. Derivando due volte rispetto a ϑ si ha

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\vartheta^2} = -\frac{e\cos(\vartheta - \omega)}{p} \tag{13}$$

Sommando membro a membro la (12) e la (13), e sostituendo nella (11), abbiamo:

$$F = -\frac{mc^2}{pr^2} \tag{14}$$

Il segno negativo dice che la forza F ha il senso diretto da P ad S, cioè è attrattiva; essendo poi $\frac{c^2}{p}$ costante, F risulta proporzionale alla massa e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole. Segue allora, dalla prima legge di Kepler, che la forza, che sollecita i pianeti, è l'attrazione del Sole e che questa attrazione è proporzionale alla massa e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Considerando due punti materiali S e P di massa M ed m, che si attirino fra loro con forza F proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza SP, e indicando con f il coefficiente attrattivo che,

in unità C.G.S., è uguale a $6{,}67 \cdot 10^{-8}$, abbiamo la celebre formula di Newton della Gravitazione Universale

$$(15) \qquad F = -f \frac{M m}{r^2}$$

che, come abbiamo visto, si deduce dalle leggi di Kepler, e dalla quale, viceversa, possono dedursi quelle leggi. In altre parole la legge di Newton è condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi delle leggi di Kepler. La costante f di attrazione universale o costante di Gauss può interpretarsi (ponendo $M = m = r = 1$) come la forza con cui si attraggono due masse unitarie, poste all'unità di distanza. Una prima determinazione di f, con dirette esperienze di laboratorio, fu compiuta da Cavendish (1797). A proposito delle verifiche sperimentali di Cavendish, Perucca (72, *I* ; 4) annota : « Il fisico compie su ogni risultato sperimentale, al quale cerca sempre di attribuire la portata più ampia possibile, una necessaria estrapolazione. Per esempio, dalla esperienza di Cavendish si conclude che... tutti i corpi dell'universo obbediscono alla legge di Gravitazione di Newton ». Associando la *legge del moto* con la *legge d'attrazione*, Newton creò lo strumento che permette di calcolare, partendo dallo stato di un sistema esistente in un *istante dato*, gli stati immediatamente anteriori e posteriori (purchè i fenomeni siano causati dalle sole forze di gravitazione). Tutte le cause d'accelerazione delle masse di un sistema agiscono, quindi, soltanto su queste masse stesse. Così Newton è giunto a spiegare i moti dei pianeti, dei satelliti, delle comete fin nei particolari più minuti, nonchè il flusso e il riflusso e il movimento di precessione della Terra. Newton constatò ancora che la causa dei movimenti dei corpi celesti è identica alla gravità (fenomeno familiare alla nostra esperienza quotidiana) ; constatò cioè che la gravità terrestre era un caso particolare dell'attrazione universale. Con sviluppi forniti dalla Meccanica Razionale, di cui ometto i passaggi (9, *b* ; 97), nei quali intervengono, per lo studio del problema dei due corpi, note formule di Geometria Analitica e la riferita formula di Binet, con il relativo valore della costante delle aree $c = r^2 \dfrac{d\vartheta}{dt}$, si ottiene l'*equazione fondamentale* della teoria delle orbite

$$(16) \qquad f\,(M + m) = n^2 a^3$$

con $f\,(M + m) = c^2/p$, c = costante delle aree, p = parametro dell'ellisse ed f = coefficiente attrattivo ; n è il rapporto $\dfrac{2\pi}{T}$, rap-

presentante la velocità angolare media o moto medio del pianeta P, con T = tempo impiegato dal raggio vettore per descrivere tutta l'orbita, ed a = semiasse maggiore dell'orbita. È noto dalla Meccanica che il baricentro del sistema costituito da due punti materiali S e P, di massa rispettivamente M ed m, si trova sulla congiungente SP e divide questa congiungente in parti *inversamente* proporzionali alle masse M ed m. È stato calcolato il baricentro del sistema Terra-Sole e si è trovato che tale baricentro cade *dentro* il Sole, per cui il Sole è praticamente immobile rispetto al baricentro del sistema planetario.

Applicando l'equazione fondamentale della teoria delle orbite a due pianeti P_1 e P_2 si ha:

$$(17) \qquad f(M + m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}; \; f(M + m_2) = \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2}$$

dove M rappresenta la massa del Sole, ed m_1 ed m_2 rispettivamente le due masse di P_1 e P_2. Dividendo membro a membro le due relazioni (17) si ha

$$(18) \qquad \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

Per la terza legge di Kepler avremo approssimativamente

$$(19) \qquad \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$$

e quindi il rapporto $\frac{M + m_1}{M + m_2}$ è *approssimativamente uguale all'unità.* Ma m_1 ed m_2 di P_1 e P_2 possono essere assai differenti fra loro (si pensi alla differenza fra Giove e il piccolo asteroide Eros); si conclude allora che, perchè detto rapporto sia prossimo alla unità, m_1 e m_2 debbono essere necessariamente molto piccoli rispetto ad M. Quindi la *terza legge di Kepler mostra che le masse dei pianeti sono molto piccole rispetto alla massa del Sole.* Ricerchiamo il rapporto fra la massa m di P e la massa M di S. P abbia un satellite di massa μ, avente da P la distanza media α e moto medio ν (fra un momento parleremo della determinazione delle distanze).

Avremo

$$(20) \qquad f(m + \mu) = \nu^2 \alpha^3$$

Dividendo membro a membro la (20) per la (16) e trascurando μ di fronte ad m, ed m di fronte ad M, otteniamo

$$(21) \qquad \frac{m}{M} = \frac{\nu^2 \alpha^3}{n^2 a^3}$$

il cui calcolo esige soltanto la conoscenza degli elementi, α, a, ν ed n, che si rilevano senza difficoltà dalle osservazioni: così si trova immediatamente il valore del rapporto m/M. Questo metodo può essere applicato ai sei pianeti aventi satelliti, e cioè Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno. Per i tre pianeti non aventi satelliti (Mercurio, Venere e Plutone) ci si serve delle perturbazioni, che la loro attrazione produce nei pianeti vicini, applicandosi all'uopo i metodi forniti dalla Meccanica Celeste. Per i vari pianeti si è trovato:

Mercurio	1/8.000.000	Saturno	1/3.500
Venere	1/410.000	Urano	1/22.650
Terra	1/331.950	Nettuno	1/19.350
Marte	1/3.085.000	Plutone	(?)
Giove	1/1.047		

Sia m, che figura nel rapporto (21), la massa della Terra. Calcoliamola. A tal uopo vediamo come è stato determinato il valore del raggio R della Terra. Misurando un certo numero di archi, sia di meridiano che di parallelo, e utilizzando formule di Geodesia Ellissoidica, si è trovato che il Geoide ha forma molto prossima ad un ellissoide rotondo schiacciato. Dal complesso delle misure, Hayford ha dedotto, per l'ellissoide che meglio si avvicina al Geoide, i seguenti valori:

$$a = 6.378{,}4 \text{ km.} \ ; \ c = 6.356{,}9 \text{ km.}$$

essendo a il suo semiasse maggiore o equatoriale e c il suo semiasse minore o polare. La circonferenza equatoriale risulta eguale a 40.076 chilometri; la periferia dell'ellisse meridiana a 40.008 chilometri. Il rapporto $\frac{a - c}{a}$ o schiacciamento terrestre risulta quindi uguale a 1/297. Il *metro* dovrebbe esser eguale alla quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, senonchè questo è eguale a 40.008 Km. Quindi il metro campione depositato nel Museo di Arti e Mestieri di Parigi è *più corto del vero* di circa *un quinto di millimetro*. Noti a e c è facile trovare il volume dell'ellissoide rotondo o Geoide.

La massa m della Terra (e quindi la sua densità) si può determinare, in via approssimata, partendo dal valore della accelerazione g della gravità, supposto conosciuto in base ad esperienze gravimetriche dirette. È noto che il peso g dell'unità di massa, in un punto qualsiasi della superficie terrestre, è la risultante della attrazione terrestre totale e della forza centrifuga (l'una e l'altra riferite all'unità di massa). Ma la componente preponderante è la prima, che, schematiz-

zando la Terra in una sfera di raggio R, ha, per la legge di Newton, intensità eguale a

$$(22) \qquad \frac{f\,m}{R^2}\,.$$

Quindi (trascurando la forza centrifuga dell'unità di massa) si può porre

$$(23) \qquad g = \frac{f\,m}{R^2}\,;\quad \text{da cui } m = \frac{g\,R^2}{f}$$

Effettuando i calcoli si ottiene per la massa della Terra $m = 5{,}97\cdot 10^{27}$ grammi. Dividendo il valore m della (23) per il volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ della Terra (supposta sferica), si ottiene per la densità media il valore

$$(24) \qquad \delta = \frac{3\,g}{4\,\pi\,R\,f}\,.$$

Essendo $g = 9{,}8$ m.sec^{-2} e, per la definizione del metro, $2\,\pi\,R =$ m. $4\cdot 10^7$, si ha

$$(25) \qquad \frac{3\,g}{4\,\pi\,R\,f} = \frac{3\,.\,9{,}8}{8\cdot 10^7\cdot 6{,}7\cdot 10^{-8}} = \frac{3\cdot 9{,}8\cdot 10}{8\cdot 6{,}7}$$

pari, all'incirca, a 5,52 (rispetto all'acqua). Poichè la densità media delle rocce superficiali si aggira intorno a 2,5, devesi ammettere che nell'interno della Terra la materia sia più compatta che alla superficie.

Nota la massa m della Terra, moltiplicando per 331.950 si ottiene, per la massa del Sole, $M = 1{,}98\cdot 10^{33}$ grammi-massa. Trovata M, con la tabella suddetta, si trovano subito le masse dei vari pianeti. Il valore della massa del Sole si calcola anche, direttamente, deducendola dalla legge di Newton. Un pianeta P, ruotando attorno al Sole lungo una ellisse, confondibile in prima approssimazione con un cerchio, è soggetto, ad ogni istante, all'azione newtoniana centripeta : $-f\frac{mM}{R^2}$, ove m è la massa del pianeta e M quella del Sole, R la distanza pianeta-Sole, f la costante di gravitazione. Dividendo per m detta azione newtoniana si ha l'accelerazione centripeta di P, e cioè : $-f\frac{M}{R^2}$. Ricordando che la accelerazione centripeta (51, a, I ; 144) è

$$a_R = -\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{R^2} = -\frac{4\,\pi^2 R^4}{T^2}\cdot\frac{1}{R^3} = -\frac{4\,\pi^2}{T^2}R$$

ove T è l'anno sidereo ed R il raggio vettore, scriveremo

$$(26) \qquad f\frac{mM}{R^2} = m.\ \text{acceler. centripeta} = m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

da cui segue

$$(27) \qquad M = \frac{4\pi^2 R^3}{f\,T^2}$$

Per la Terra è approssimativamente: $T = 31.560.000$ sec.; $R = 1{,}496\cdot10^{13}$ cm. Si ha allora $M = 1{,}98.10^{33}$ grammi-massa. Per conoscere la densità δ del Sole e degli altri pianeti occorre prima determinare le distanze della Terra e dei pianeti dal Sole; poi si calcolano i diametri e quindi i volumi e le densità.

Parallasse diurna p è l'angolo sotto cui un osservatore ideale, posto nel pianeta, o nella cometa, vedrebbe il raggio terrestre OA condotto dal centro della Terra al luogo A dove si trova l'astronomo. Per il teorema di Eulero si ha

$$(28) \qquad \frac{R}{\sin p} = \frac{D}{\sin z}$$

dove z è la distanza zenitale $Z\hat{A}C$, D la distanza dell'astro, R il raggio terrestre. La parallasse diurna è nulla allo zenit e massima all'orizzonte, nel quale caso si chiama *parallasse orizzontale.* Per $z = 90^\circ$ e per p molto piccola (il seno si confonde con l'arco) si ha

$$(29) \qquad D = \frac{R}{p}$$

dove l'angolo p è valutato in secondi di arco.

Poichè si ha

radianti : gradi = 1 radiante : 206.265 secondi di arco

e, quindi, radianti = $\dfrac{\text{gradi (espressi in secondi di arco)}}{\text{206.265 (secondi di arco di un radiante)}}$

esprimendo l'angolo in radianti, la formula precedente diventa

$$(30) \qquad D = \frac{206.265 \cdot R}{p} .$$

Se si conosce la distanza di un pianeta o di una cometa in km., poichè il raggio terrestre è dato in km., risulta immediatamente nota la parallasse orizzontale. Viceversa, se per mezzo di osservazioni astronomiche riusciamo a misurare p, conosceremo anche la distanza in km. dell'astro dalla Terra. Con opportuni metodi si è determinata nel 1931 la parallasse del pianetino Eros, ricavandosi poi per la parallasse del Sole il valore 8",79. Ponendo nella (30) $p = 8'',79$ e $R = 6.378,4$ km. (raggio equatoriale), si ha $D = 149.600.000$ km., distanza media del Sole dalla Terra, ossia il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, detta *unità astronomica* (9,*b* ; 90, 199 e 202). Mediante le osservazioni e con le operazioni di trigonometria elementare si sono calcolate le distanze dei pianeti dal Sole (espresse in unità astronomiche) ; e ciò prima ancora di conoscere il valore di tale unità. Chiamando *distanza media* la media aritmetica della minima e della massima distanza dal Sole che il pianeta raggiunge nel percorrere la propria orbita ellittica, e prendendo come unità la distanza media della Terra dal Sole, si sono ottenuti i seguenti valori :

Mercurio	0,39	Marte	1,52	Urano	19,18
Venere	0,72	Giove	5,20	Nettuno	30,07
Terra	1,00	Saturno	9,54	Plutone	39,5 (?)

La legge, con cui procedono queste distanze, risponde approssimativamente alla nota *legge di Bode.* Noti i rapporti delle distanze planetarie dal Sole, una volta determinata la lunghezza dell'unità astronomica in km., tutte le distanze planetarie vengono pure conosciute in km.

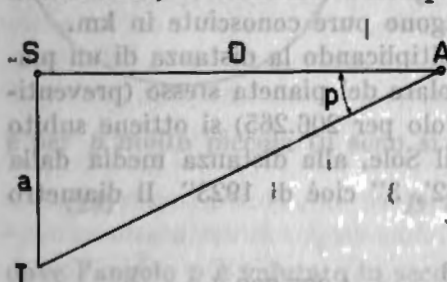
Determiniamo ora i diametri. Moltiplicando la distanza di un pianeta dalla Terra per il diametro angolare del pianeta stesso (preventivamente ridotto in radianti dividendolo per 206.265) si ottiene subito il suo diametro in km. Così per es. il Sole, alla distanza media dalla Terra, ha un diametro angolare di 32', 3" cioè di 1923". Il diametro reale d del Sole sarà allora

$$(31) \qquad d = 149.600.000 \cdot \frac{1923}{206.265} = 1.395.000 \text{ km.}$$

e cioè circa 109 volte il diametro terrestre. Con lo stesso procedimento si è trovato il diametro di Giove in 142.000 km., di Saturno in 120.000 km., di Mercurio in 4.700 km., ecc. Noto il diametro è subito noto il

volume. Dividendo la massa per il volume si ottiene la densità media. Armellini sottolinea il fatto che (9, *b*; 203) « *il pianeta più denso è la Terra* », la quale, prendendo per unità la densità dell'acqua, ha, come abbiamo visto, una densità media di circa 5,52. Ecco le densità medie dei pianeti e del Sole: Venere 4,9; Marte 4,0; Mercurio 3,8; Nettuno 1,6; Giove e Urano 1,3; Saturno 0,7, il Sole 1,4.

Abbiamo esaminato alcuni fra i più importanti procedimenti per ottenere i valori delle masse, delle distanze, dei diametri, dei volumi, delle densità del Sole e dei pianeti. Prima di inoltrarci nei procedimenti rivolti ad ottenere analoghe grandezze per le stelle, insisto sul fatto che tutti gli strumenti matematici di calcolo, le leggi di Kepler e di Newton, ecc. poggiano sull'ipotesi che lo spazio astronomico sia euclideo.

Ripetiamo che Armellini, come abbiamo accennato nel precedente capitolo, (9, *a*, *II*; 79), rileva che, se si ammette una ipotesi spaziale non euclidea, i valori trovati potrebbero essere molto diversi dal vero. Vedremo tuttavia, nella Parte III, che le formule e i procedimenti applicati, e i valori con essi ottenuti, *non implicano necessariamente che lo spazio sia euclideo, ma possono riferirsi anche ad uno spazio non euclideo*: in altre parole, non perdono la loro validità se, attribuendo alle grandezze e alle variabili, che figurano nelle formule, significati *non* euclidei, li riferiamo ad uno spazio non euclideo. Circa poi la precisione di detti procedimenti, ripetiamo qui le parole di Bridgmann, già ricordate: « L'astronomia viene considerata di solito come una scienza di grandissima precisione, ma la sua precisione è assai ristretta come dominio, in quanto copre soltanto le misure angolari. Probabilmente è lecito dire che nessuna distanza astronomica, eccetto forse quella della Luna, è nota con una precisione superiore allo 0,1 % ».

Passiamo ora alle parallassi stellari. A causa del moto di rivoluzione della Terra, l'osservatore terrestre cambia continuamente di luogo nello spazio sidereo. Cambiando il centro di vista, varia anche la posizione di un astro qualsiasi sulla sfera celeste. Per i pianeti tali spostamenti sono molto grandi; ma anche per una classe di stelle, quelle a noi *relativamente* vicine, detti spostamenti sono sensibili alle osservazioni, sebbene siano piccolissimi. Dalla trigonometria si ha

$$a = D \cdot tg\, p \qquad (32)$$

relazione che, per p molto piccola (la tangente si confonde con l'arco), si scrive

$$(33) \qquad a = D \cdot p \quad \text{cioè} \quad D = \frac{a}{p}$$

dove p è la *parallasse annua* valutata in secondi di arco, a la distanza Terra-Sole (unità astronomica) e D la distanza della stella dal Sole. Quindi *la parallasse annua è l'angolo sotto cui un osservatore ideale, situato nella stella, vedrebbe il raggio* a *dell'orbita terrestre, supposto normale alla congiungente la stella con il Sole.* Esprimendo l'angolo in radianti, la (33) si scrive:

$$(34) \qquad D = \frac{206.265 \cdot a}{p}$$

Come *unità di distanza stellare* si assume una lunghezza pari a 206.265 unità astronomiche, eguale a $3{,}084 \cdot 10^{13}$ km., o anche eguale a 3,26 anni di luce, essendo l'anno di luce (e cioè il cammino percorso dalla luce in un anno) eguale a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ Km. Tale unità viene chiamata *parsec* (parallasse-secondo) perchè rappresenta la distanza di un astro ideale la cui parallasse annua sia di un secondo di arco. La formula (34), preso eguale a 1 il numeratore, cioè 206.265 a, diventa $D = \frac{1}{p}$; un astro, per cui si avesse $p = 1$ secondo di arco, avrebbe *distanza unitaria* (1 parsec). Quindi la distanza in parsec è uguale al reciproco della parallasse p espressa in secondi. Accuratissime misure micrometriche riescono a determinare p fino al centesimo di secondo di arco, per cui questo metodo (detto trigonometrico) diviene illusorio per stelle, la cui distanza superi i cento parsecs. Utilizzando l'eliometro per il metodo trigonometrico si è calcolata, fra le altre, la parallasse di α Centauri, ottenendosi $p = 0'',76$: si tratta della stella *relativamente* più vicina, che si conosca, distando da noi $1/0{,}76 = 1{,}3$ parsecs $= 4{,}3$ anni-luce.

I metodi di determinazione *visuale* delle parallassi trigonometriche hanno oggi ceduto il posto al metodo *fotografico*, più rapido e più preciso.

Vediamo ora il *metodo dinamico o delle stelle binarie.* Numerose stelle come Rigel, Albireo, Antares, Castore, ecc., che, ad occhio nudo, appaiono come una sola stella, osservate mediante il cannocchiale, risultano composte di due stelle in apparenza vicinissime. Osservazioni micrometriche od interferometriche permettono studiare il moto relativo di una qualsiasi di esse S_1 (si suole prendere la meno luminosa, detta *satellite*) rispetto all'altra S_2; si trova che, obbedendo alla legge di Newton, S_1 descrive con la legge delle aree, in un periodo di tempo T

generalmente di molti anni, una ellissi, avente per fuoco S_2; si determinano gli elementi dell'orbita ellittica, restando espresso il semiasse maggiore in a'' secondi di arco. Dalla trigonometria si ha

$$a_1 = D \cdot tg\, a'' \tag{35}$$

essendo D la distanza della stella doppia dalla Terra ed a_1 la lunghezza, in unità astronomiche, del semiasse maggiore. Essendo a'' piccolissimo, abbiamo

$$a_1 = D \cdot a'' \tag{36}$$

Per la (34) si ha

$$p = \frac{1\ (parsec)}{D} \tag{37}$$

sostituendo nella (36) abbiamo

$$a'' = p \cdot a_1 \tag{38}$$

Vedremo subito come determinare a_1 e a''; noti questi, dalla (38) si ricava p e, quindi, la distanza D cercata.

Chiamando m_1 e m_2 le masse delle due stelle S_1 e S_2, n il moto medio di S_1 intorno a S_2 ed a_1 la lunghezza del semiasse maggiore, l'equazione fondamentale della teoria delle orbite (16) si scrive

$$f\,(m_1 + m_2) = n^2 a_1^3 \tag{39}$$

Assumendo come unità di lunghezza, di tempo e di massa rispettivamente l'unità astronomica, l'anno e la massa del Sole, avremo $f = 4\pi^2$, $n = \dfrac{2\pi}{T}$ e la (39) diventa

$$m_1 + m_2 = \frac{a_1^3}{T^2} \tag{40}$$

Avverte Armellini (9, *a*, *II*; 96): « Occorre notare che le nostre conoscenze sopra le masse degli astri sono ancora assai scarse ». In base alla statistica, si ammette che le masse stellari siano in generale poco differenti tra loro; si può supporre quindi che esse siano approssimativamente uguali a quella del Sole (che abbiamo presa come unità di massa). Quindi avremo $m_1 + m_2 = 2$. Poichè T è nota dalle osservazioni, la (40) ci fornisce a_1 in unità astronomiche. Mediante il micrometro applicato all'equatoriale si viene a determinare poi a'', dopo averlo proiet-

tato sul piano tangente alla sfera celeste. Le parallassi così ottenute mediante l'equazione fondamentale della Teoria delle orbite, sono dette, per questa ragione, *dinamiche*.

Esamineremo ora il *metodo spettroscopico*. Premettiamo alcune nozioni. Si chiama grandezza visuale apparente, o semplicemente *grandezza apparente* di una stella, un numero che *misura la sua intensità luminosa apparente*. Pogson si basò sulla *legge psicofisica* di G. T. Fechner (v. Cap. III), secondo la quale *la sensazione è proporzionale al logaritmo dello stimolo*. Nel caso delle stelle, le loro intensità ci *sembrano* differire come i numeri 1, 2, 3, 4..., mentre le rispettive luminosità stanno tra loro come i numeri 1 : 2,5 ; $2{,}5^2$: $2{,}5^3$... Pogson, quindi, definì le grandezze stellari in modo che, passando da una di esse alla successiva, l'intensità luminosa variasse in ragione geometrica. Il fattore di progressione è stato scelto uguale alla radice quinta di cento, e cioè 2,512; in tal modo l'intensità luminosa si riduce alla sua centesima parte ogni volta che la grandezza aumenta di cinque unità, in modo, cioè, ad es. che la sesta grandezza valga 100 volte meno della prima. Una stella è di seconda grandezza quando la sua intensità luminosa è 2,512 volte minore di una stella di prima grandezza; è di terza grandezza quando la sua intensità luminosa è 2,512 volte minore di quella di una stella di seconda grandezza, ossia $2{,}512^2$ volte minore di quella di una stella di prima grandezza, ecc. Una stella di sesta grandezza è $2{,}512^5$, cioè 100 volte meno luminosa di una stella di prima grandezza; una stella di undecima grandezza è cento volte meno luminosa di una di sesta grandezza, ecc. La stella Polare è posta di grandezza 2,12, perchè le stelle stimate di sesta grandezza dagli antichi restassero ancora della medesima grandezza. Una stella di grandezza zero appare 2,512 volte più luminosa di una stella di prima grandezza, cioè $2{,}512^{2,12}$ volte più luminosa della Polare; una stella di grandezza —1 è 2,512 volte più luminosa di una stella di grandezza zero, ecc. Il Sole, secondo Russell, è di grandezza —26,72, cioè ha uno splendore $2{,}512^{28,84}$ volte maggiore di quello della stella Polare.

Ad occhio nudo, in condizioni di buona visibilità, si possono vedere le stelle fino alla *sesta* grandezza, che, per tale motivo, si dicono *Stelle Lucide*. Si dicono *Semilucide* le stelle dalla sesta alla decima grandezza, visibili con piccoli cannocchiali; *Telescopiche* le stelle dall'undecima alla quindicesima grandezza, visibili con gli equatoriali ordinari; *Ultratelescopiche* quelle dalla quindicesima grandezza in poi.

La grandezza visuale apparente di una stella si indica generalmente con la lettera m (magnitudo) e con I la sua intensità luminosa. Chia-

mando con m_0 ed I_0 la grandezza e l'intensità luminosa di una stella di confronto (per es. del Sole), si ha la seguente legge di Pogson:

(41) $$I = I_0 \frac{2{,}512^{m_0}}{2{,}512^{m}} = I_0 \cdot 2{,}512^{m_0 - m}$$

da cui $\log \frac{I}{I_0} = (m_0 - m) \log 2{,}512$

Essendo $\log 2{,}512 = \log 100^{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5} = \frac{1}{2{,}5}$ si ha

(42) $$m = m_0 - 2{,}5 \log \frac{I}{I_0}$$

detta *formula di Pogson.*

L'intensità luminosa di una stella può esprimersi sia con la grandezza visuale apparente m, come abbiamo detto, sia con la grandezza visuale assoluta M, cioè con la grandezza che avrebbe la stella se venisse posta ad una distanza fissa da noi, e cioè a 10 parsecs. Se si conosce la distanza D della stella valutata in parsecs o la sua parallasse p, in secondi di arco, si può passare da m ad M. Infatti la legge del quadrato delle distanze dice che l'intensità luminosa di un fascio di raggi uscenti da una sorgente è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente, cioè, chiamando i l'intensità a distanza 1, e J l'intensità a distanza D, abbiamo

(43) $$J = \frac{i}{D^2}$$

Se la stella, invece di distare D parsecs, ne distasse 10, la sua intensità verrebbe moltiplicata per $\frac{D^2}{100}$, ossia si avrebbe $J' = \frac{i}{D^2} \cdot \frac{D^2}{100} = \frac{i}{D^2} \cdot \frac{D^2}{10^2}$

Essendo D uguale all'inverso della parallasse p, possiamo scrivere anche

(44) $$J' = \frac{i}{D^2} \cdot \frac{1}{10^2 \cdot p^2}$$

Moltiplicando quindi il rapporto $\frac{I}{I_0}$ della formula di Pogson per $\frac{1}{10^2 p^2}$ si ha

$$M = m_0 - 2{,}5 \log \frac{I}{I_0} \cdot \frac{1}{10^2 p^2} = m_0 - 2{,}5 \log \frac{I}{I_0} - 2{,}5 [-2 - 2 \log p] =$$

$$= m_0 - 2{,}5 \log \frac{I}{I_0} + 5 + 5 \log p$$

Sostituendo ai primi due termini del secondo membro il loro valore m, abbiamo la relazione

$$M = m + 5 + 5 \log p \tag{45}$$

Per il Sole, essendo 1 parsec = 206.265 unità astronomiche a, essendo cioè $a = 1/206.265$ parsecs, poichè la distanza in parsecs è uguale al reciproco della parallasse p espressa in secondi, si ha $p = 206.265''$ e quindi, essendo $m = -26{,}72$, risulta $M = 4{,}85$. Ciò significa che il Sole, posto a distanza di 10 parsecs o di 33 anni di luce da noi, apparirebbe come una stella di quinta grandezza.

Abbiamo già richiamato l'attenzione sulla (45) nel capitolo precedente, ricordando che Armellini (9, *a*, II; 79) rileva, fra l'altro, che tale formula, essendo costruita in base alla legge delle distanze, ha una reale validità *solo se si suppone che lo spazio sia euclideo*. Se si ammette una ipotesi diversa (curvatura dello spazio) i valori ottenuti, mediante tale formula, potrebbero essere molto diversi dal vero. Ripetiamo ancora, però (e lo preciseremo più avanti), che tale formula può conservare la sua validità in uno spazio *non euclideo* (di cui spiegheremo le leggi di equivalenza a quello euclideo), *purchè* alle grandezze e alle variabili, che vi figurano, vengano attribuiti significati *non euclidei*.

Per valutare la parallasse p mediante la formula (45) occorre determinare m ed M. Le grandezze stellari si distinguono in: 1°) grandezze visuali o fotovisuali; tale è la grandezza m e la grandezza assoluta M della formula (45); 2°) *grandezze fotografiche* (indicate con i simboli m_p e M_p = grandezza assoluta); 3°) *grandezze bolometriche* (indicate con il simbolo m_b e M_b = grandezza assoluta).

L'occhio umano è sensibile solo alle radiazioni di lunghezza d'onda, all'incirca, che vanno da 4000 a 8000 unità *Ångström* = 10^{-8} cm.; tale sensibilità poi è scarsissima agli estremi e massima per la luce gialla, con lunghezza d'onda di 5600 U.A.; è da notare che tale lunghezza di onda presenta nello spettro solare la massima energia; l'occhio quindi utilizza la parte più intensa dello spettro solare.

Le intensità delle singole radiazioni vengono misurate mediante il bolometro, apparecchio sensibilissimo, dotato di un filamento *annerito*, il quale assorbe quasi tutta l'energia che lo colpisce, trasformandola in energia calorifica. L'accrescimento della resistenza elettrica, che il filamento subisce, riscaldandosi, viene registrato da un ponte di Wheatstone. È stata studiata così la distribuzione di energia nelle varie parti dello spettro solare. Dalle misure dell'energia ricevuta dalla Terra si è calcolato che il Sole emette $6{,}25 \cdot 10^{10}$ erg al secondo per ogni centimetro

quadrato di superficie; d'altra parte, dal rilievo delle intensità riguardanti le diverse regioni del suo spettro, esso irradia all'incirca come un corpo nero. Per la legge di Stefan-Boltzmann, il totale dell'energia irradiata in tutte le direzioni, per minuto secondo e per unità di superficie, dal corpo nero varia con la quarta potenza della temperatura assoluta, cioè

$$W = \sigma T^4 \tag{46}$$

dove σ è una costante che in numerose esperienze è stata calcolata in $5{,}72 \cdot 10^{-5}$ erg al secondo per centimetro quadrato. Avendosi, per il Sole, $W = 6{,}25 \cdot 10^{10}$ si ricava $T = 5750$ gradi assoluti. Il bolometro si adopera specialmente per misurare l'energia totale che una stella invia sulla superficie dell'obiettivo del cannocchiale. Analoghe misure si ottengono anche con la pila termoelettrica o col radiometro di Nichols, detti anch'essi, strumenti «bolometrici». Tali strumenti sono sensibili a *tutte* le radiazioni, di cui misurano la quantità di energia, mentre l'occhio umano e la lastra fotografica sono strumenti *selettivi*, essendo sensibili solo ad alcune determinate radiazioni. Esperienze accuratissime hanno mostrato che l'intensità di un astro è, con molta approssimazione, proporzionale all'intensità bolometrica nel giallo e dintorni. Astraendo dalle stelle di color rosso rubino, il rapporto dell'intensità bolometrica con l'intensità visuale è quasi costante. Le grandezze visuali si dicono *fotovisuali* se si adoperano lastre fotografiche pancromatiche con filtro giallo, in modo da mettere la lastra nelle stesse condizioni della retina dell'occhio umano. Quando si usano lastre fotografiche senza filtro, allora si hanno le grandezze *fotografiche*. Le intensità visuali e fotografiche corrispondono approssimativamente all'energia della radiazione stellare, rispettivamente nel colore giallo e nel colore azzurro. La differenza fra grandezza fotografica m_p e grandezza visuale m dicesi, per tale ragione, *indice del colore*. La differenza fra la grandezza bolometrica m_b e la grandezza visuale m di una stessa stella dicesi *indice bolometrico*. La grandezza apparente m è, pertanto, facilmente misurabile. Per calcolare M, Adams e Kohlschütter hanno proposto un metodo empirico che ha avuto soddisfacenti conferme indirette. Tale metodo tuttavia ammette una spiegazione teorica. La grandezza assoluta M di una stella è funzione della sua massa μ

$$M = M(\mu) \tag{47}$$

La pressione p sulla fotosfera stellare dipende dalla gravità in superficie e quindi dalla massa stellare μ e dal raggio r dell'astro; cioè si ha

$$p = p(\mu, r) \tag{48}$$

Ancora: la grandezza assoluta M è funzione del raggio r dell'astro e della sua temperatura T; si ha quindi

$$(49) \qquad M = M\,(r,\ T)$$

Immaginando di eliminare μ e r tra le tre equazioni si ottiene

$$(50) \qquad M = F\,(p,\ T)$$

cioè la grandezza assoluta di un astro dipende dalla temperatura e dalla pressione fotosferica. Poichè l'esame del comportamento delle righe spettrali, e specialmente della loro intensità relativa, permette determinare la pressione e la temperatura fotosferica, per mezzo di esso si può conoscere la grandezza assoluta di un astro.

Il ragionamento teorico conferma pertanto il risultato pratico conseguito da Adams e da Kohlschütter, i quali affermarono che *negli spettri stellari* (di cui parleremo fra un momento) si *possono individuare delle righe, la cui intensità relativa indica la grandezza assoluta di una stella.*

Noti, quindi, M ed m, dalla formula (45) si ricava la parallasse p; questo metodo, per il modo con cui si determina M, dicesi *metodo spettroscopico.* Ripetiamo qui, tuttavia, le parole di Bridgmann, ricordate al principio del Capitolo precedente (16; 34): « L'astronomia viene considerata di solito come una scienza di grandissima precisione, ma la sua precisione è assai ristretta come dominio... Per distanze stellari molto grandi siamo costretti a stime molto rozze, contando, per es., sulla estrapolazione a grandi distanze delle relazioni trovate, nel campo delle parallassi, tra luminosità e tipo spettrale di una stella... ».

La determinazione della grandezza M (e quindi della parallasse p) si effettua anche mediante il *metodo delle Cefeidi o metodo fotometrico.* Dobbiamo prima accennare alle classificazioni stellari. La luce composta da radiazioni di diversa lunghezza d'onda può decomporsi, per mezzo di un prisma, ottenendosi il relativo *spettro luminoso.* Gli spettri possono essere *continui* o *discontinui.* I solidi e i liquidi incandescenti danno spettri continui (i colori si succedono senza interruzione visibile). I gas e i vapori incandescenti danno spettri discontinui (i vari colori sono interrotti da spazi oscuri): siffatti spettri si dicono di *emissione.* Se, dopo aver posta davanti alla fenditura dello spettroscopio una sorgente luminosa, che fornisca uno spettro continuo, interponiamo fra detta sorgente e la fenditura una sostanza trasparente, questa *assorbe* parte della luce emessa da quella. Nello spettro della sorgente compariranno allora righe e bande oscure in corrispondenza dei colori assorbiti: l'in-

sieme di tali righe e bande costituisce lo *spettro di assorbimento* della sostanza interposta fra la sorgente e la fenditura. Se sulla fenditura dello spettroscopio si fa cadere la luce del Sole, si ottiene lo *spettro solare*, il quale appare solcato da molte righe oscure, normali alla lunghezza dello spettro, che, dal nome del loro scopritore, si chiamano *righe di Fraunhofer*. La legge d'inversione dello spettro di Kirkhoff (« ogni corpo è capace di assorbire quelle stesse radiazioni che esso può emettere ») ha reso possibile *l'analisi spettrale* dell'atmosfera del Sole e delle stelle, giacchè restava provato che le righe oscure, che appaiono nei loro spettri (*spettri di assorbimento*) erano dovute al fatto che le stelle erano circondate da un'atmosfera gassosa a temperatura meno elevata. Fu possibile individuare i corpi contenuti nell'atmosfera stellare, paragonando la posizione di queste righe con quelle delle righe luminose emesse dai vari elementi terrestri resi incandescenti (*spettri di emissione*). Procedendo secondo l'ordine dell'evoluzione stellare si sono indicati con le lettere, *P, Q, O, B, A, F, G, K, M, N, R* i diversi *tipi spettrali* di Harvard : *P* appartiene alle nebulose planetarie ; *Q* alle stelle "Novae"; *O* alle stelle di Wolf, nel cui spettro compaiono righe lucide di emissione dell'elio e dell'azoto ionizzati ; *B* ed *A* alle stelle, nel cui spettro prevale l'elio e l'idrogeno ; *F, G, K* alle stelle nel cui spettro prevalgono i metalli (calcio, ferro, ecc.) ; *M* ed *N* a quelle, nel cui spettro compaiono, rispettivamente, le bande del titanio e del carbonio. Il passaggio da un tipo all'altro si fa per decimi e s'indica, in generale, con un numero scritto alla destra del simbolo letterale : così da *K* passiamo ad *M* per mezzo dei sottotipi K_0, K_1, K_2, ecc. fino a K_9. Secondo la teoria del fisico indiano Megh Nad Saha, il tipo spettrale — insieme delle particolarità che caratterizzano le righe dello spettro — dipende dal grado di ionizzazione dello strato assorbente, che circonda la fotosfera stellare, e quindi dalla temperatura e dalla pressione dello strato stesso. Indice del calore e tipo spettrale vengono collegati, quindi, per mezzo della temperatura : la dipendenza sarà diversa secondo la pressione e quindi secondo che si tratti di stelle giganti o stelle nane (di cui diremo subito).

L'indice del colore è fondato sull'ipotesi che le stelle irradino come un radiatore perfetto (corpo nero) ; in tal caso la distribuzione di energia dello spettro, e quindi il calore, la temperatura, ecc. risultano determinate, se si conosce il rapporto delle energie emesse in due regioni qualunque dello spettro stesso.

Secchi aveva diviso le stelle in quattro gruppi, prendendo per base il loro colore : 1) classe I : stelle bianche (Sirio, Wega, ecc.); 2) classe II : stelle gialle, con spettro simile a quello solare (Capra, Polluce, Arturo,

ecc.); 3) classe III: stelle aranciate (Betelgeuse, ecc.); 4) classe IV: stelle rosse.

Henry Norris Russel (1913) rilevò le relazioni esistenti fra grandezza assoluta degli astri e loro tipo spettrale. Riportando sulle ordinate le grandezze assolute in ordine decrescente e sulle ascisse i vari tipi spettrali, si nota subito che i punti, invece di essere sparsi a caso, si concentrano in alcune regioni: 1) un gran numero di punti si concentra in una linea poco diversa da una retta, detta da Eddington « mean sequence » (media sequenza), costituita dalle *stelle nane.* 2) Un altro gruppo di punti si addensa intorno ad un'altra retta, detta « retta delle giganti »; 3) un piccolo gruppo di punti trovasi vicino all'origine (stelle bianche nane). Ciò conduce ad una grande divisione stellare: una classe di astri molto luminosi e un'altra di astri poco luminosi, notevole fenomeno che ha portato ad indicare con il nome di *stelle giganti* quelle di grande splendore assoluto (luminosità corrispondente alla grandezza assoluta M) e col nome di *stelle nane* quelle di debole splendore assoluto. Giganti e nane sono le stelle giallo oscure e rossastre dei tipi K ed M. Il grande splendore delle stelle bianche deriva, almeno in parte, dalla loro alta temperatura, attestata dall'estensione del loro spettro nell'ultravioletto. Per le stelle gialle e rosse la spiegazione è un'altra: le differenze di temperatura non potrebbero bastare a far brillare certe stelle mille volte più delle altre. La grande luminosità delle stelle giganti gialle e rosse dipende o dal fatto che hanno massa più grande o dal fatto che, pur avendo una massa dello stesso ordine delle nane, hanno una superficie molto maggiore, hanno cioè un maggior volume. Questa ultima è l'ipotesi più attendibile: nel 1921 erano conosciute già le masse di 150 coppie di stelle doppie e la massa totale delle due componenti era compresa fra 0,45 e 3,3 volte la massa solare, ciò che significa che la massa di qualunque stella si approssima a quella del Sole. Quindi è la differenza di volume che caratterizza le *giganti* e le *nane.* Le stelle non presentano grandi differenze di massa, ma grandi differenze di volume. Le stelle giganti hanno volumi migliaia di volte più grandi di quelli delle nane e, poichè le masse, come diciamo, variano entro limiti ristretti, la densità delle stelle giganti risulta assai inferiore a quella delle stelle nane; ma su ciò torneremo tra breve, per trattare delle misure dei diametri e delle densità stellari.

Altissimo interesse presentano le stelle *variabili,* quelle, cioè, il cui splendore è soggetto a variazioni. Esse si dividono in due categorie: 1) variabili ad eclisse o stelle binarie fotometriche, nelle quali la variazione è *apparente* (la duplicità, per la grande vicinanza dei due astri,

non può essere rilevata nemmeno con l'interferometro, come abbiamo visto nella ricerca delle parallassi dinamiche, ma è dedotta indirettamente da una variazione periodica dell'intensità luminosa) 2); *variabili fisiche o variabili intrinseche*, nelle quali la variazione di luce è *reale*.

Le *variabili fisiche* sono, in generale, *stelle giganti* di debolissima densità media. Costruiamo un diagramma prendendo per ascisse il tempo e per ordinate le grandezze stellari disposte in ordine decrescente, in modo che alle ordinate più elevate corrispondano intensità luminose maggiori: osservando con continuità una variabile e riportando nel diagramma le diverse grandezze, che essa assume con il tempo, si otterrà una curva detta *curva di luce*. L'intervallo di tempo P fra due successivi valori delle ascisse, aventi uguale ordinata, dicesi *periodo*. A secondo che il periodo si riproduce inalterato o si riproduce all'ingrosso o vi è solo traccia di periodicità, la variabile dicesi, rispettivamene, *regolare, semiregolare, irregolare*.

Le variabili, in numero di circa 750, con periodo aggirantesi, in media, sui 280 giorni, diconsi *variabili a lungo periodo*, e sono semiregolari. Un gruppo di 150 variabili con periodo di circa 12 ore diconsi *Cefeidi dei Clusters*. Un gruppo di circa 50 variabili, di color bianco, i cui periodi sono, in media, di 5 giorni, si dicono *Cefeidi* propriamente dette (dal nome della più nota fra esse, la δ *Cephei*) o *variabili a breve scadenza*, e sono, in generale, regolari. *Le Cefeidi* o *variabili regolari* o *variabili a breve periodo* o *variabili bianche* sono stelle supergiganti appartenenti ai primi tipi spettrali (B, A od F), hanno colore bianco e presentano variazioni di luminosità di modesta ampiezza (una o due grandezze stellari) di breve periodo e di grande regolarità (la curva di luce è quasi esattamente periodica).

Nella nube di Magellano furono trovate molte Cefeidi. La grandezza assoluta M — media tra il massimo e il minimo splendore — delle Cefeidi diminuisce regolarmente con l'accrescersi del periodo P, come fu rilevato da Miss H. Leavitt, cui si deve la formula

$$M = -3{,}3 \log P \tag{51}$$

dove il logaritmo è a base decimale. Prendendo infatti per ascissa $\log P$ e per ordinata M e costruendo un diagramma, subito si rileva che per piccoli valori di P la curva tende a disporsi parallelamente all'asse delle ascisse, mentre, quando P supera i due o tre giorni, la curva assume un andamento quasi rettilineo con una certa inclinazione rispetto all'asse delle ascisse. Poichè le Nubi di Magellano hanno una distanza estremamente grande rispetto alle loro dimensioni, tutte queste Cefeidi

hanno quasi la stessa parallasse (generalmente inferiore a 0",01). Pertanto per la formula (45) M differisce da m solo per il termine *costante* $5 + 5 \log p$. Allora le grandezze assolute M — corrispondenti al medio splendore — ed i periodi P delle Cefeidi, in numero di 1800 circa, delle nubi di Magellano risultano collegate da una relazione, che, per P superiore ai due giorni circa, può esprimersi con l'equazione lineare

$$M = a + b \log P$$

essendo a e b due parametri. Si può assumere $a = 0{,}4$ e $b = -3{,}3$. Trascurando a abbiamo la (51). Determinando con misure fotometriche il periodo P e la grandezza apparente m di una Cefeide, resta conosciuta M e quindi la parallasse p. La relazione (51) poggia su varie ipotesi; la più accettabile appare quella delle pulsazioni. L'astro sarebbe soggetto a pulsazioni periodiche. Tali oscillazioni spiegherebbero la legge di Leavitt, la relazione tra il periodo e la densità media dell'astro, le variazioni di temperatura e di pressione, ecc. La determinazione della parallasse mediante la legge di Leavitt costituisce il *metodo delle Cefeidi* o *metodo fotometrico*.

Passiamo alla valutazione dei diametri stellari. Le stelle ci appaiono come semplici punti luminosi anche osservandole con i telescopi più potenti che esistono. Il cannocchiale, pertanto, non consente misurare il diametro angolare delle stelle. Per tale valutazione occorre procedere in altro modo. Nell'ipotesi che le stelle irradino come corpi neri, la legge di Stefan e Boltzmann consente scrivere una relazione tra la grandezza bolometrica apparente, la temperatura assoluta ed il diametro stellare. L'energia Q emessa da una stella è direttamente proporzionale alla quarta potenza di T ed alla superficie irradiante dell'astro, ossia al quadrato del suo diametro d ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r, cioè $Q = k\, d^2\, T^4/r^2$ Poichè il diametro apparente D è uguale al rapporto tra il diametro lineare d e la distanza r dalla Terra, ossia $D = d/r$, si ha $Q = k\, D^2\, T^4$, cioè il flusso risulta proporzionale al prodotto del quadrato del diametro apparente per la quarta potenza della temperatura. Se indichiamo con S una stella da misurare e con S_0 una stella campione (per es. il Sole) avremo, per la legge di Pogson, la relazione

$$m_b - m_{b_0} = -2{,}5 \log \frac{D^2\, T^4}{D_0^2\, T_0^4} \qquad (52)$$

che fornisce il diametro apparente D di S, conoscendo la sua temperatura T, la sua grandezza bolometrica m_b e le caratteristiche analoghe della stella di confronto.

Prendendo come stella campione il Sole, per il quale, misurando il diametro angolare in secondi di arco, si ha

$$D_0 = 1924'' \; ; \; T_0 = 6000 \; ; \; m_{b_\odot} = -26{,}7$$

si è ottenuto, per es., per Betelgeuse, $D = 0'',04$, che, moltiplicato per la distanza dell'astro dalla Terra (circa 300 anni-luce), ottenuta mediante la sua parallasse $p = 0'',017$, fornisce il diametro lineare d pari a più di 400 milioni di chilometri. Queste valutazioni teoriche sono associate a misure dei diametri angolari delle stelle, mediante l'interferometro, apparecchio (dovuto a Michelson), che serve per determinare la lunghezza d'onda delle radiazioni luminose. Non c'indugeremo su tale procedimento.

Quando, viceversa, sia noto il diametro apparente di una stella, si può avere la temperatura T della stessa, partendo dalla conoscenza della grandezza bolometrica. La quantità di energia ricevuta, con la ipotesi che le stelle irradino come radiatori perfetti, dipende solamente dalla temperatura e dall'angolo sotto il quale la stella è osservata. La temperatura di Betelgeuse e Antares è stata calcolata in 3.600 gradi; quella di Sirio e Wega in 11.000 gradi, ecc.

Sulla valutazione delle masse stellari già abbiamo fatto più d'un cenno. Armellini (9, *a*; II; 96), come abbiamo già ricordato, scrive: « Occorre anzitutto notare che le nostre conoscenze sopra le masse degli astri sono ancora assai scarse ». Si è trovato, tuttavia, che la luminosità stellare cresce insieme con la massa, e dal complesso delle osservazioni sembra che il logaritmo della massa stellare sia funzione lineare della grandezza assoluta di M.

Eddington, partendo da considerazioni teoriche sopra la costituzione interna delle stelle, ha dimostrato che la luminosità stellare dipende dalla massa e dalla temperatura effettiva e quindi dal tipo spettrale. Egli ha fornito alcune relazioni per il calcolo delle masse stellari. Le conclusioni, cui sono giunti gli astronomi, sono quelle già dette innanzi, e cioè che le stelle non presentano grandi differenze di masse, ma grandi differenze di volume. E già vedemmo come per le *parallassi dinamiche* si ammette che le masse stellari siano approssimativamente uguali a quella del Sole.

Note le masse e i diametri stellari, si ottengono immediatamente le densità e i volumi. Prendendo come unità la densità dell'acqua distillata alla temperatura di 4 centigradi, riferiamo la densità media δ calcolata per alcune stelle di cui si è calcolata la massa e il volume. Antares, stella gigante con un diametro maggiore di quello dell'orbita di Marte, ha una densità uguale a $3 \cdot 10^{-7}$, cioè circa due mila volte mi-

nore della densità dell'aria. Betelgeuse ha una densità di $6 \cdot 10^{-7}$. Fra le stelle nane bianche il satellite di Sirio è 30.000 volte più denso dell'acqua; un decimetro cubo della sua materia peserebbe sulla Terra 30 tonnellate; è 25.000 volte più denso del Sole.

Passiamo ora alle valutazioni delle velocità degli astri. Gli spettri a righe subiscono modificazioni, detti *effetti*, i principali dei quali sono: effetto Doppler o di velocità, effetto Zeeman od effetto magnetico, effetto Stark-Lo Surdo od effetto elettrico, effetto Humphreys od effetto di pressione, effetto Einstein od effetto gravitazionale. Per l'astronomo hanno prevalente importanza l'effetto di pressione, e, sopra tutti, l'effetto Doppler, che consente la determinazione delle velocità radiali delle stelle.

Il teorema di Doppler si fonda sia su concetti teorici sia su esperienze di laboratorio e può così enunciarsi: se la sorgente luminosa si avvicina o si allontana dall'osservatore, la frequenza delle righe spettrali appare aumentata nel primo caso e diminuita nel secondo di una quantità direttamente proporzionale alla velocità di allontanamento o di avvicinamento (velocità radiale relativa) ed inversamente proporzionale alla velocità della luce.

Tra le varie dimostrazioni teoriche del principio di Doppler, Armellini (9, *a*, I; 247) sceglie per semplicità la seguente:

Sia r la distanza della sorgente luminosa dallo osservatore e c la velocità della luce. Un'onda luminosa, partita dalla sorgente nell'istante t, arriverà all'osservatore in un istante t' dato da

$$t' = t + \frac{r}{c} \tag{53}$$

Nell'istante successivo $t + dt$ parta dalla sorgente una seconda onda: questa arriverà all'osservatore nell'istante $t' + dt'$. Differenziando la (53) e tenendo presente che, chiamando v la velocità radiale $\left(v = \frac{dr}{dt}\right)$, si ha

$$dt' = dt + \frac{dr}{c} = dt\left(1 + \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right) = dt\left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{54}$$

si vede che l'intervallo dt', che separa gli istanti di arrivo di due onde successive, è diverso dall'intervallo dt, che separa gli istanti di partenza. Essendo la frequenza inversamente proporzionale all'intervallo di tempo

compreso fra onde successive, si avrà, chiamando con N' la frequenza di arrivo e con N quella di partenza,

$$\frac{N}{N'} = \frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{v}{c} = \frac{c+v}{c} \text{ e quindi } \frac{N'}{N} = \frac{c}{c+v} \text{ da cui}$$

$$N' = \frac{Nc}{c+v} \text{ e anche } N' - N = \frac{-Nv}{c+v}$$

che, trascurando v di fronte a c e ponendo $\Delta N = N' - N$, diviene

$$\Delta N = -\frac{Nv}{c} \tag{55}$$

che esprime, appunto, il Teorema di Doppler. Ammessa la costanza della velocità della luce, la relazione tra frequenza e lunghezza d'onda $N\lambda = c$, passando ai logaritmi, si scrive

$$\log N = -\log \lambda + \log c$$

Differenziando, abbiamo

$$\frac{dN}{N} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{56}$$

Dalla formula (55) si ha $\frac{\Delta N}{N} - = \frac{v}{c}$;

sostituendo nella (56) abbiamo, ponendo $d\lambda = \Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda v}{c} \tag{57}$$

Armellini ricorda, poi, che il principio di Doppler subirebbe notevoli modificazioni se si ammettesse che l'astro potesse comunicare la propria velocità alla luce emessa secondo la cosiddetta « ipotesi balistica », di cui parleremo nel cap. II, Parte II.

Nella relazione (55), dove N rappresenta la frequenza corrispondente ad una data riga spettrale e ΔN la sua variazione, la velocità v si deve considerare positiva se la sorgente luminosa si allontana dall'osservatore e negativa nel caso opposto. La relazione (57), avendo la luce la velocità di 300.000 km. al secondo, ci dice che, nella regione visuale dello spettro, lo spostamento delle righe è dell'ordine di *un cinquantesimo di Ångström* (cm. $\frac{1}{5} \cdot 10^{-9}$) *per ogni chilometro di velocità della sorgente.* La valutazione della velocità radiale non è scevra di difficoltà per la estrema esattezza richiesta nell'esame degli spettri stellari. Con la (57) si è calcolata una tabella che fornisce la velocità

radiale in chilometri al secondo, in corrispondenza di un *Ångström* nelle varie righe spettrali: se le righe si spostano verso il rosso (*v* positiva) la stella si allontana, se si spostano verso il violetto (*v* negativa) la stella si avvicina.

Per ottenere λ e *d* λ basta fotografare lo spettro dell'astro e misurare la lunghezza d'onda di una riga di un elemento qualsiasi (per es. dell'idrogeno, del ferro, ecc.), paragonandola con quella ottenuta nei laboratori. Essendo nota *c*, risulta nota *v*. In pratica, invece di una sola riga, si esaminano molte righe di diversi elementi, come pure si tiene conto della velocità dovuta al moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole e si fanno le medie dei risultati. Si sono ottenute le velocità radiali rispetto al Sole di più di 7.000 stelle. Antares ha una velocità radiale di avvicinamento di 3 chilometri al secondo; Aldebaran e Betelgeuse una velocità di allontanamento rispettivamente di 54 e 21 km. al secondo.

È stata calcolata la velocità del Sole rispetto all'insieme delle stelle che lo circondano: è di circa 19,5 km/sec., dirigendosi il Sole verso la costellazione dell'Ercole (Tav. VIII).

L'effetto Doppler permette il calcolo delle orbite di sistemi binari tanto stretti, che nessun cannocchiale basterebbe a risolvere. Armellini annota, tuttavia, alcuni «strani fenomeni», com'egli dice (9, *a*, II; 64 e 66): «Per la β Canis Maioris si è trovato un periodo di circa *6 ore* per il moto oscillatorio delle righe e per la variazione della loro lunghezza. Misure fotometriche analoghe, con analoghi risultati, sono state effettuate per varie altre stelle. Nessuna spiegazione sicura è stata data di questi strani fenomeni... La velocità radiale, variabile periodicamente, indicherebbe stelle doppie spettroscopiche, ma, d'altra parte, è ben difficile ammettere che due Soli possano ruotare l'uno intorno all'altro in poche ore!». E più oltre (9, *a*; II; 331): «Per Mira Ceti — e generalmente per le variabili a lungo periodo — il massimo splendore ha luogo quando la velocità radiale è vicina al suo massimo valore algebrico della velocità radiale. Si ha dunque l'opposto di quanto avviene per le Cefeidi... tale divergenza rimane ancora inesplicata».

Gli oggetti celesti, esclusi i corpi appartenenti al Sistema Planetario, possono suddividersi in *stelle, nebulose ed ammassi globulari*. Le nebulose si presentano ai nostri occhi come nubi luminose. Osservate al telescopio, alcune di esse si risolvono in un ammasso di stelle apparentemente tanto vicine da non distinguersi l'una dall'altra a occhio nudo; altre conservano il loro aspetto di nebbie luminose. Un tempo si credette che, accrescendo la potenza degli strumenti, questi corpi celesti

si sarebbero risolti, ma dopo il 1864 Huggins mostrò con l'analisi spettrale che alcune nebulose sono colossali nubi composte di molecole gassose e di polveri e che bisognava per esse rinunziare alla speranza di risolverle in stelle componenti. Una nebulosa spirale, fotografata con il telescopio di 100 pollici del M. Wilson, ha una distanza, che risulta essere 500 milioni di anni luce (20 ; 678). Secondo la classificazione di Hubble, le nebule si dividono in due grandi classi — *Galattiche ed Extragalattiche* — secondo che esse appartengano, o no, alla via Lattea. Le prime si suddividono ancora in *planetarie e diffuse*, le altre in *regolari* e *irregolari* ; le regolari in *ellittiche* e *spirali*. Nella grande Nube di Magellano è stata calcolata la distanza di una nebulosa diffusa, detta nebulosa gigante del Dorado, in 30.000 parsecs con un diametro di 80 parsecs pari a 250 anni di luce e con una luminosità 40 milioni di volte superiore a quella del Sole.

Nella Nube di Magellano si trovano ammassi globulari di stelle (*star clusters*), ognuno dei quali, ammettendo siano costituiti di stelle simili al Sole, risulterebbe composto di circa un milione di Soli ! Si calcolano densità dell'ordine di 10^{-21} (20 corpuscoli — atomi od elettroni liberi — per ogni centimetro cubo). Le nebulose planetarie (si presentano come dischi o anelli) sono globi gassosi di gigantesche dimensioni (diametri migliaia di volte superiori alla distanza della Terra dal Sole). Le nebulose extragalattiche hanno distanze sino a centinaia di milioni di anni-luce. Mentre le nebulose galattiche sono nubi di gas e di pulviscolo, quelle extragalattiche sono, in generale, *giganteschi sistemi di milioni di stelle* — tra le quali hanno speciale importanza le Cefeidi e le Stelle Novae — commisti con *ammassi gassosi* : si tratta di veri *universi* racchiudenti stelle e nubi gassose. Per misurarne la distanza gli astronomi usano il *metaparsec* pari a un milione di parsecs, cioè 3.260.000 anni di luce. Le righe spettrali delle nebulose extragalattiche sono generalmente assai spostate verso il rosso. « Se ci serviamo del principio di Doppler, scrive Armellini (9, *a*, III ; 223) ed interpretiamo questo spostamento come effetto della velocità radiale, dobbiamo concludere che le nebulose extragalattiche si allontanano rapidamente da noi ». Knox Shaw (1933) ha esaminato 52 nebulose diffuse ed ha osservato che il rapporto fra la loro velocità radiale in km./sec. e la loro distanza in metaparsecs rimane presso a poco *costante*. Da ciò segue che la velocità radiale delle nebulose extragalattiche è, all'incirca, proporzionale alla loro distanza, potendosi stimare di circa 600 km./sec. per metaparsec di distanza. La velocità radiale dell'ammasso dell'Orsa Maggiore è di 11.870 km./sec., quella dell'ammasso del Leone è di 19.640

km./sec. Abbiamo dato, così, uno sguardo ai metodi e agli strumenti matematici utilizzati dagli astronomi per calcolare distanze, masse, volumi, densità, temperature, luminosità e velocità dei corpi celesti. Alla base dei calcoli, delle valutazioni, delle interpretazioni *sta l'ipotesi che lo spazio sia euclideo* o, più precisamente, l'ipotesi che le grandezze e le variabili, che in quelle formule figurano, abbiano significato euclideo. Le leggi di Kepler, quelle di Newton, le formule di trigonometria piana, la legge delle distanze su cui è costruita la formula fondamentale (45), si fondano su quella ipotesi. La Teoria della Relatività Generale, di cui ci occuperemo nella seconda parte di questo lavoro, sebbene rifiuti lo spazio euclideo — e la portata di tale posizione, da un punto di vista qualitativo, è enorme — non ci rappresenta tuttavia un universo sensibilmente differente da quello classico. Malgrado le differenze di natura teorica e filosofica, che intercorrono tra la meccanica newtoniana e la nuova teoria relativistica, e malgrado la differenza formale del rispettivo metodo matematico, la prima è tuttora compresa nella seconda, come prima approssimazione, generalmente più che sufficiente per la descrizione dei fatti. Gli astronomi eseguono sistematicamente i loro calcoli servendosi delle formule e degli algoritmi che abbiamo esaminato, interpretandoli in senso euclideo. L'effetto Doppler viene anche esso interpretato sulla base che lo spazio sia euclideo. Le valutazioni realmente favolose, cui siffatta ipotesi conduce, lasciano perplessi, tuttavia, anche scienziati di specifica competenza e vasta notorietà.

Giuseppe Armellini, che ho più volte menzionato e dalle cui chiare opere ho tratto gran parte delle notizie contenute in questo capitolo, è fra questi. Armellini fu ordinario di Astronomia nell'Università di Roma e Direttore, per molti anni, dell'Osservatorio e del Museo Astronomico di Monte Mario, carica che occupò fino alla sua morte, avvenuta nel 1958.

Ebbene, ripeto, egli, come ho accennato sopra, a proposito delle velocità radiali, annota (9, *a*, III ; 223) : « Se ci serviamo del principio di Doppler ed interpretiamo questo spostamento come effetto della velocità radiale, dobbiamo ammettere il rapido allontanamento da noi delle nebulose ». Sempre a proposito di tali velocità, Arthur Eddington scrive (29, *a* ; 20) : « Le velocità ci dimostrano una fretta che (se ci teniamo alle idee accettate sui tempi di evoluzione) non corrisponde al carattere conservativo del nostro vecchio universo. Quindi l'unico modo per evitare un grande sconvolgimento d'idee sarebbe di mostrare che tutte queste velocità radiali sono fittizie. In fondo quel che si osserva è uno spostarsi dello spettro nebulare verso il rosso. Questo spostamento è

provocato normalmente dall'effetto Doppler di una velocità di allontanamento, allo stesso modo in cui si abbassa la nota del fischio di una locomotiva, che si va allontanando; ma si possono immaginare altre cause. Lo spostamento verso il rosso significa minor frequenza delle onde luminose, e quindi, secondo la teoria dei quanti, minore energia: cosicchè se per una causa qualunque un quanto di luce venisse a perdere della sua energia durante il suo viaggio verso di noi, lo spostamento verso il rosso verrebbe spiegato senza che fosse necessario essere ricorsi alla velocità della sorgente ».

Nella sua « Storia dell'errore umano » Joseph Jastrow dell'Università di Wisconsin così si esprime: « I dati delle osservazioni spettroscopiche dimostrano proprio con assoluta certezza che le galassie si allontanano? Dobbiamo rispondere di *sì*. Di sì se la sola interpretazione possibile delle linee, che si spostano verso il rosso, è quella basata sul principio di Doppler. Se invece, per un'ignota meccanica delle lontane sorgenti di luce o per causa del mezzo attraverso il quale la luce arriva fino alla Terra, le vibrazioni fossero rallentate, l'intensità dell'onda di luce potrebbe abbassarsi ugualmente e si avrebbe allora uno spostamento delle linee dello spettro verso il rosso, anche indipendentemente dal principio di Doppler ».

Sul fatto che la formula (45) si basi sull'ipotesi che lo spazio sia euclideo e che non vi sia assorbimento di luce per parte di materie cosmiche diffuse nelle regioni interstellari, richiama l'attenzione ancora Armellini (9, *a*, II; 77/8/9) come ho già ricordato.

Si estrapola, si ammette che le condizioni nello spazio terrestre siano pressochè identiche a quelle dello spazio sidereo, si ammette che i risultati delle esperienze dei nostri laboratori siano identici ai risultati, che otterremmo se sperimentassimo su grande scala negli spazi calcolati a parsecs e a metaparsecs. Dalla verifica sperimentale della rettilineità della luce, si estrapola e si applica la trigonometria piana per il calcolo delle distanze degli astri. Dalla verifica sperimentale della legge di attrazione effettuata da Cavendish si estrapola e si afferma che tutti i corpi celesti obbediscono a quella legge; su di essa si fonda altresì il metodo di calcolo delle parallassi dinamiche. Dalla verifica sperimentale della legge del quadrato delle distanze si estrapola e si asserisce che tale legge è valida anche nei lontani spazi siderei, e in base ad essa si calcolano le parallassi spettroscopiche. Dalla verifica sperimentale della relazione esistente fra luminosità e tipo spettrale si estrapola e si applica tale relazione per la determinazione della grandezza assoluta M degli astri. Dalla verifica sperimentale della legge di Stefan

e Boltzmann si estrapola e la si applica per la determinazione delle temperature e dei diametri stellari. Dalla verifica sperimentale dell'effetto Doppler si estrapola e si interpretano gli spostamenti delle righe spettrali di astri lontanissimi come velocità radiali di avvicinamento e di allontanamento. Effettuare tali estrapolazioni significa attribuire allo spazio sidereo la natura euclidea dello spazio ordinario, dove appunto dette verifiche sperimentali vengono effettuate. Ma sono lecite tali estrapolazioni ? Eddington, Bridgman ed altri eminenti scienziati hanno espresso ripetutamente al riguardo delle riserve. Sambursky, riferendosi ai pitagorici, che scoprendo i rapporti dell'armonia musicale, proiettavano nei cieli i ritrovati di siffatta teoria, scrive (80; 53) : « Noi procediamo oggi, al pari dei pitagorici, basandoci sull'ipotesi che le leggi fisiche scoperte in laboratorio, per mezzo di strumenti fabbricati dall'uomo, siano della stessa natura delle leggi cosmiche ». Galilei, che vide ancor prima di Bacone il vero carattere del metodo induttivo fisico-matematico, ne precisò, tre momenti : dell'osservazione, dell'ipotesi e della verifica. Mentre i tre momenti possono porsi in atto nello studio dei fenomeni accadenti nello spazio ordinario, per quanto concerne invece il mondo sidereo ci si deve fermare ai primi due : la verifica sperimentale delle ipotesi, atte a spiegare i fenomeni osservati nello spazio sidereo, è impossibile (almeno finora). Pertanto non resta altra via che quella di estrapolare. Ma non vi è proprio altra via ? I fenomeni osservati non ammettono, forse, differenti interpretazioni tali da consentire di attribuire un carattere profondamente diverso alla struttura del mondo ? La risposta, come vedremo, è affermativa. Ma non è solo sul carattere ipotetico di tutti i risultati dell'astronomia classica, che si soffermano le menti più attente nell'indagare la natura dell'universo. Bridgman, come ho ricordato già, avverte (16 ; 34) che la fama di precisione della Astronomia non è del tutto giustificata. « La sua precisione, egli dice, è assai ristretta come dominio, in quanto copre soltanto misure angolari ». E abbiamo già visto quanto afferma Armellini sulle masse degli astri (9, *a*, II ; 96) : « Occorre notare che le nostre conoscenze sopra le masse degli astri sono ancora assai scarse ». Si fanno delle ipotesi in base alla statistica : si ammette che le masse degli astri siano all'incirca tutte eguali. Se si pensa alle parallassi dinamiche, alla divisione di una vasta classe di astri in stelle giganti e stelle nane e ad altre questioni dove si parte appunto da detta ipotesi sulle masse, che non sembra sufficientemente giustificata, si comprende come da ciò segua che numerosi risultati di calcoli astronomici, riguardanti distanze, volumi, densità, ecc. di corpi siderei debbano considerarsi avvolti da

notevole incertezza. In epoca relativamente recente, come vedremo nel cap. III (Parte II), per la determinazione delle masse stellari, è stato applicato *l'effetto Einstein*, con risultati, che sono in completo disaccordo con l'ammissione precedente dell'uguaglianza, o quasi, di tutte le masse delle stelle. Nè le enormi difficoltà, sia per identificare che per determinare quantitativamente tale effetto, permettono avere, quanto alla attendibilità dei risultati, una sicurezza maggiore di quella offerta da altri metodi di ricerca. Scrive ancora Bridgman (16 ; 32) : « Gli angoli tra le linee colleganti punti lontani sono angoli fra raggi di luce. Compare l'ipotesi che un raggio di luce viaggi in linea retta ». Parleremo più avanti di questa ipotesi. Possiamo farci però, subito, una domanda : le grandezze angolari osservate consentono l'ipotesi di uno spazio completamente diverso da quello euclideo ? Mediante una trasformazione *conforme* dello spazio euclideo possiamo sostituire all'ipotesi dello spazio euclideo l'ipotesi di uno spazio non euclideo, nel quale si abbia invarianza degli angoli (di intersezioni di orbite, di raggi di luce, ecc.) e che spieghi chiaramente e meglio del supposto spazio euclideo tutti i fatti osservati ? Anche questa risposta è affermativa. È quanto vedremo nella terza parte di questo lavoro.

Nella parte II dovremo esaminare la Teoria della Relatività di Einstein, che costituisce, per quanto riguarda l'evoluzione del concetto di spazio una svolta decisiva : sebbene lo spazio relativista differisca di pochissimo da quello classico, qualitativamente è di somma importanza la conclusione einsteniana che *l'Universo non è euclideo.*

RIASSUMIAMO

L'idea di spazio implica due problemi: 1) lo spazio esiste in sè, indipendentemente dalla materia, dai corpi, dai campi, oppure s'identifica con le cose, i corpi, i campi, costituenti il mondo fisico?; 2) la nozione di spazio sorge come risultato della nostra esperienza sensibile o si trova insita *a priori* (Kant) nella nostra mente? La filosofia antica si occupa essenzialmente soltanto del primo problema e lo risolve, in generale, nel primo modo; la filosofia critica moderna lo risolve nel secondo. In quanto all'altro problema, la critica moderna dimostra l'insussistenza dell'*a priori* kantiano e l'acquisto delle nozioni di spazio come risultato della nostra esperienza sensibile.

Dobbiamo distinguere (Veronese) lo spazio intuitivo, rappresentativo o fisio-psicologico dallo spazio fisico, e questo dallo spazio geometrico. Lo spazio intuitivo è soggettivo e, a seconda che intervengano insiemi di sensazioni della vista, del tatto e del senso muscolare, dicesi rispettivamente ottico, tattile e del senso muscolare o del movimento. Si dimostra (Poincaré) che il continuo fisico, costituito da insiemi di sensazioni ottiche, tattili e muscolari, è diverso dal continuo matematico. Mediante associazioni e confronti delle diverse percezioni il soggetto riesce a obiettivare, in larga misura, il mondo esterno; dallo spazio soggettivo si perviene allo spazio obiettivo, allo spazio fisico propriamente detto, che non è che il mondo esterno, cioè la totalità dei suoi oggetti nel senso più largo e più moderno di queste parole, la totalità dei corpi, sia intesi, secondo Einstein, come grandi concentrazioni di energia (corpi materiali) che come deboli concentrazioni di energia (campi). L'esperienza suggerisce poi alla mente delle forme astratte, irrappresentabili, che costituiscono gli enti della geometria. L'ente geometrico sorge da un processo di astrazione della mente ed ha una natura non confrontabile con quella degli oggetti reali; questi servono solo d'incentivo a quel processo di elaborazione mentale. Poincaré ha immaginato un mondo sottoposto a una certa legge di variazione della temperatura: in esso i corpi non si muovono rigidamente

perchè la temperatura, che varia da punto a punto, li dilata o li contrae. Tale ipotesi, insieme con altre, pure introdotte da Poincaré, conducono a condizioni e fenomeni fisici che suggerirebbero agli abitanti di siffatto mondo una geometria non euclidea : la linea più breve si avrebbe lungo una curva (nel senso euclideo). Non ha senso parlare della « realtà » di una geometria, in primo luogo perchè questa è una costruzione astratta e in secondo luogo perchè è la realtà fisica che suggerisce ora un tipo di geometria ora un altro, a seconda della natura del fenomeno, che si voglia descrivere. Pertanto non si può parlare di « geometria fisica » o di « geometria che si prolunga nella Fisica », ma solo di enti geometrici coordinabili (che si possono far corrispondere o concordare) con gli oggetti reali (*isomorfismo*). Sia FG un sistema costituito da una proposizione matematica G con la corrispondente esperienza F, cui si riferisce : F, da sola, non ha carattere logico, G, da sola, non ha carattere fisico, ma fra F e G vi è complementarità. FG è una struttura, un sistema fisico-matematico atto a coordinare un certo fenomeno fisico con certi enti astratti della geometria ; siffatta coordinazione può essere data ugualmente bene anche da altre strutture $F'G'$, $F''G''$, ecc., tra loro isomorfe. Si deve, poi, distinguere tra « curvatura » dello spazio geometrico e « curvatura » dello spazio fisico. Dicesi « curvo » uno spazio geometrico al quale non è applicabile la relazione pitagorica (il quadrato dell'elemento lineare non è riducibile alla forma $ds^2 = \sum_1^n {}_i\, dx_i^2$). Si hanno spazi : 1) a curvatura costante, in particolare nulla (geometria piana), dove le figure trasportate da un punto all'altro non si deformano (movimenti rigidi) ; 2) a curvatura variabile, dove le figure spostandosi si deformano (movimenti non rigidi). Si hanno spazi geometrici a più di tre dimensioni (varietà piane o curve di Riemann).

In quanto allo spazio fisico, nel senso anzidetto da attribuire a queste parole, si dirà che esso è piano se la geometria coordinabile alle relazioni fra i corpi, ai fenomeni fisici è quella euclidea ; si dirà curvo se la geometria coordinabile ai fenomeni da descrivere non è quella euclidea. La « curvatura » sarà variabile o costante, a seconda che i corpi, spostandosi, subiscano o no deformazioni : per la descrizione dei relativi fenomeni fisici si richiederà allora una geometria a curvatura rispettivamente variabile o costante. Un medesimo spazio fisico può essere considerato « curvo » o « piano » a seconda che per la descrizione dei *medesimi* fenomeni naturali si applichi (e si possono presentare entrambe le possibilità) una struttura fisico-matematica FG, dove G è

una geometria non euclidea, o una struttura $F'G'$, isomorfa a FG, dove G' è la geometria euclidea. Lo spazio fisico, in rapporto ai procedimenti di misura adottati su piccola scala (spazio atomico), su scala ordinaria (spazio ordinario o terrestre), su grande scala (spazio astronomico), assume caratteri diversi. Una grandezza fisica è definita dal procedimento che serve a misurarla (Persico). Dire che una certa stella dista 10 anni-luce è effettivamente e concettualmente una cosa di genere interamente diverso dal dire che un certo palo è distante 10 metri (Bridgman). Ai fenomeni dello spazio atomico non può applicarsi la meccanica classica, fondata sulla geometria euclidea: da questo punto di vista può asserirsi che lo spazio atomico non è euclideo. Lo spazio ordinario presenta, invece, fenomeni, ai quali possono coordinarsi, in maniera particolarmente semplice ed efficace, in rapporto ai nostri scopi, gli enti della geometria euclidea: in questo senso lo spazio terrestre è euclideo. Mentre per lo spazio atomico e per quello terrestre possono applicarsi i tre momenti del metodo induttivo fisico-matematico dell'osservazione, dell'ipotesi e della verifica (Galilei), per lo spazio astronomico, che è uno spazio di tipo ottico, non può svolgersi il terzo momento, quello della verifica: «nello spazio astronomico non abbiamo occasione di confrontare lo spazio tattile con lo spazio ottico» (Bridgman). I fenomeni celesti non sono quindi suscettibili di controllo sperimentale, e non possono, pertanto, suggerirci particolari enti geometrici atti a descriverli. Non resta altra via che estrapolare, ammettendo che i risultati delle esperienze dei nostri laboratori siano identici ai risultati che otterremmo se sperimentassimo su grande scala, negli spazi calcolati a parsecs e a metaparsecs, vale a dire ammettendo che, al pari dello spazio ordinario, lo spazio astronomico sia euclideo.

Esaminando gli strumenti di calcolo usati per valutare le masse, le velocità, le temperature, i volumi, le densità e le distanze dei pianeti e degli astri si rilevano le fondamentali estrapolazioni: la propagazione rettilinea della luce, la legge di attrazione verificata da Cavendish, la legge del quadrato delle distanze, la relazione esistente tra luminosità e tipo spettrale, la legge di Stefan e di Boltzmann, l'effetto Doppler. Eddington, Bridgmann, Perucca ed altri eminenti scienziati hanno espresso delle serie riserve sulla legittimità di siffatte estrapolazioni. Possiamo domandarci allora: i fenomeni osservati ammettono differenti interpretazioni, tali da attribuire un carattere profondamente diverso alla struttura del mondo? Mediante una trasformazione *conforme* dello spazio euclideo possiamo sostituire all'ipotesi dello spazio euclideo l'ipotesi di uno spazio non euclideo, nel quale si abbia invarianza degli

angoli (di intersezioni di orbite, di raggi di luce, ecc.) e che spieghi chiaramente e meglio del supposto spazio euclideo tutti i fatti osservati? Le risposte a queste domande sono affermative: le esporremo nella terza parte di questo lavoro.

Bridgman rileva la imprecisione dell'Astronomia, riguardo alle valutazioni concernenti specialmente le stelle remote; Armellini rileva la circostanza che le formule astronomiche, se lo spazio non fosse, come la Teoria classica suppone, euclideo, potrebbero fornire valori molto diversi dal vero. Noi, tuttavia, vedremo che, se lo spazio non fosse euclideo, ma avesse il carattere non euclideo, che, come diciamo, esporremo nella Parte III, le formule astronomiche classiche manterrebbero, in tale spazio non euclideo, la *stessa* validità (con le riserve espresse da Bridgman) che hanno nello spazio euclideo classico, purchè alle grandezze e alle variabili, che figurano in tali formule, si attribuiscano significati non euclidei.

Nella Parte II esamineremo lo spazio della Teoria della Relatività, che, pur essendo appena differente da quello classico, ha, tuttavia, carattere *non euclideo*.

PARTE II

IL MONDO CLASSICO E IL MONDO DI EINSTEIN

PARTE II

IL MONDO CLASSICO E IL MONDO DI EINSTEIN

CAPITOLO I.

I punti deboli della Teoria di Newton.

Spazio assoluto e tempo assoluto – Azioni gravitazionali a distanza – Identità « accidentale » fra massa inerte e massa pesante.

Nella prima parte abbiamo esaminato il problema dello spazio, rilevando due punti d'importanza fondamentale: l'inesistenza di uno spazio in sè, vuoto di materia, di campo, e l'ipotesi, che sta praticamente alla base dell'attuale concezione del mondo, della natura euclidea sia dello spazio ordinario, che di quello astronomico. Riservando alla terza parte di questo lavoro l'esame di una ipotesi diversa circa la natura dello spazio astronomico, ci soffermeremo su alcune correzioni apportate da Einstein alla sistemazione newtoniana dell'Universo.

Da un punto di vista quantitativo la Teoria della Relatività non modifica che di pochissimo la Teoria di Newton, ma qualitativamente vi apporta cambiamenti profondi. È noto che possono costruirsi più spazi non euclidei in base ad altrettante differenti ipotesi. L'ipotesi di uno spazio non euclideo, che esamineremo più avanti, è differente da quella formulata da Einstein; tuttavia, non solo non vi è contrasto fra le due ipotesi, ma ritengo che possano e debbano ammettersi entrambe. Con la Teoria della Relatività il concetto della natura euclidea dello spazio sidereo è definitivamente caduto. Una specie di mito è andato in frantumi. Da questo punto di vista, formulando la nostra ipotesi, non diremo nulla di nuovo. Con la nostra ipotesi proporremo adeguate soluzioni ad altri problemi dell'attuale concezione dell'Universo rimasti insoluti, e di ciò diremo nella parte terza. Ora esamineremo i punti deboli della Teoria di Newton, che costituirono oggetto di ricerca da parte di Albert Einstein.

Newton stesso conosceva i lati deboli della sua costruzione meglio degli scienziati che lo hanno seguito. Einstein non manca di rilevarlo, e aggiunge (30, *e*; 90): « Ciò mi ha sempre riempito di ammirazione

e di venerazione ». Tale è il livello morale che congiunge, nel tempo, i grandi novatori, ad ammaestramento di molti.

Newton (e lo vedremo fra un momento in un suo celebre passo) si sforzò di presentare il suo sistema come necessariamente condizionato dall'esperienza e cercò di introdurvi il minor numero possibile di concetti, che non potessero riferirsi ai dati diretti dell'esperienza; tuttavia egli formulò il principio di Spazio e di Tempo. Nella sua famosa esperienza del secchio (76 ; 27) egli distingueva fra gli effetti dei moti assoluti e quelli dei moti relativi. Per Newton, nei moti rotatori assoluti intervengono delle forze, che tendono ad allontanare il corpo dall'asse di rotazione: causa dell'insorgere di siffatte forze centrifughe è lo spazio assoluto. Si osserva subito che «poichè questo spazio non si manifesta in nessun'altra maniera all'infuori che con queste forze, è ovvio che esso svela, per questa circostanza, i caratteri di una ipotesi fatta apposta per spiegare le forze centrifughe » (76 ; 27). Dopo aver accennato alle difficoltà di raggiungere luoghi e moti assoluti, Newton dice (85 ; 47) : « Così, invece dei luoghi e dei moti assoluti, usiamo, non inopportunamente nelle cose umane, i relativi: però nelle filosofiche si deve astrarre dai sensi »; ma poi fa un'osservazione impressionante: « fieri enim potest, ut nullum revera quiescat corpus ad quod loca motusque referantur » (infatti può accadere che nessun corpo, cui si riferiscano luoghi e moti, sia realmente quiescente). Newton, tuttavia, pur consapevole, come diciamo, del lato debole della sua teoria, introdusse lo spazio e il tempo assoluti con il loro carattere di assoluto causale, che egli dovette attribuire loro, per poter enunciare le leggi allora conosciute.

L'introduzione di forze dirette, che agiscono istantaneamente a distanza, per rappresentare gli effetti della gravitazione, era un altro lato debole della teoria newtoniana, su cui Einstein si soffermò. Alla obiezione che siffatte forze non corrispondono al carattere della maggioranza dei fenomeni dell'ordinaria esperienza Newton risponde rilevando che la sua legge dell'azione reciproca non vuol essere una spiegazione definitiva, ma una regola suggerita dall'esperienza. Così egli scrive (62, *a* ; 162/3) : « Ho spiegato fin qui i fenomeni celesti e quelli delle maree, per mezzo della forza di gravità, ma non ho ricercato la causa della gravità stessa. Essa deve derivare dall'azione di qualche cosa, che penetra fino al centro del Sole e dei pianeti, senza perdere nulla della sua attività. Non agisce proporzionalmente alla grandezza della superficie — come fanno le cause meccaniche — ma proporzionalmente alla quantità di materia; ed opera in tutte le direzioni, a

distanze illimitate, diminuendo in ragione del quadrato delle distanze stesse... Io non son riuscito ancora a dedurre dai fenomeni il perchè delle suddette proprietà della gravitazione, e non costruisco (non avanzo) ipotesi (*hypotheses non fingo*). Tutto ciò che non si deduce dai fenomeni è una ipotesi e le ipotesi — metafisiche, fisiche, meccaniche, o riguardanti qualità occulte — non hanno luogo nella *filosofia sperimentale*. In tale filosofia le *proposizioni* sono dedotte dai *Fenomeni*, e sono rese generali per mezzo dell'induzione. Così si riconoscono l'impenetrabilità, la mobilità e la forza dei corpi, le leggi del moto e quelle della gravità ».

Precisiamo meglio quest'*azione a distanza*. Una massa m puntiforme, in un punto P, in presenza di masse materiali, si trova soggetta a un campo di gravitazione, risultante dall'azione di ciascuna delle masse presenti, secondo la legge $F = f\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, a parte il segno. Poichè ciascuna di dette azioni è proporzionale ad m, anche la forza $\mathbf{F}$ del campo risulta proporzionale ad m:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} \cdot m \tag{58}$$

ove $\mathbf{H}$ è l'intensità del campo. Essendo m la massa inerziale del corpo,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{59}$$

è l'accelerazione di m per effetto del campo gravitazionale.

La determinazione della forza agente su di una massa m, in un punto P, può farsi mediante due operazioni. Si determina prima

$$\mathbf{H}(x, y, z) = f \int \left(\frac{\mathrm{d\,m}}{r^2} \right) \tag{60}$$

o il potenziale

$$V(x, y, z) = -f \int \frac{d\,m}{r} \tag{61}$$

in ogni punto del campo; poi, mediante la (58), si ricava F.

Questo procedimento matematico di calcolare prima il campo nel punto P e poi immaginare in P la massa m soggetta al campo *preesistente* $\mathbf{H}$, implica un concetto diverso da quello di Newton, il quale concepiva l'*azione* fra due masse m_1, m_2 solo nel caso che entrambe fos-

sero date e fossero localizzate in due punti P_1, P_2 dello spazio, producendosi così un'*azione a distanza*. Il procedimento matematico, di cui sopra, porta invece a concepire un campo di forza quando sia data una sola massa m, situata in un punto A dello spazio. La presenza di masse agenti *perturba* lo spazio e di siffatta *perturbazione* possiamo renderci conto, sperimentalmente, ponendo in un punto del campo una massa m, che « sentirà » il campo, a causa della reciproca azione fra il campo delle masse agenti e il campo gravitazionale determinato dalla stessa massa m. La simmetria dell'azione perturbatrice prodotta dalla massa m fa sì che questa non senta il campo che essa stessa produce. Una dissimetria si produce invece con il sovrapporsi delle perturbazioni create dalle massi agenti e dalla massa m: tale dissimetria si manifesta sotto forma di forza $\mathbf{F}$ sulla massa m. Si produce quindi un'*azione a contatto*. Questo nuovo modo di concepire le azioni gravitazionali ha preso l'avvio dai concetti insiti nella teoria dell'elettricità di Maxwell. Si è constatato che le azioni reciproche, esercitate fra i corpi da corpi elettrici e magnetici, non sono determinate da forze che agiscono istantaneamente a distanza, ma da fenomeni che si trasferiscono nello spazio ad una velocità determinata. Analogamente si è pensato che anche la perturbazione, che costituisce lo stabilirsi del campo gravitazionale, si trasferisce, mediante *azione a contatto*, con velocità finita.

Ancora un terzo punto debole ha particolarmente rilevato Einstein: la teoria di Newton non ha dato alcuna spiegazione del fatto molto notevole che *massa gravitazionale* e *massa inerziale* coincidono, singolare circostanza, che, d'altra parte, non sfuggì affatto allo stesso Newton.

Sappiamo come determinare la massa di un corpo o, più esattamente, quante volte una massa è più grande di un'altra. Ogni qualvolta, in presenza di forze identiche, agenti su due masse inizialmente in riposo, constateremo che la velocità della prima massa è tre volte superiore alla velocità della seconda, concluderemo che la prima massa è tre volte inferiore alla seconda. Per determinare la massa, in pratica, però, si procede in modo diverso e più comodo: si utilizza la bilancia, si pesa. Le esperienze di Eötvös provano che il risultato ottenuto con i due procedimenti è il medesimo. La differenza fra le due determinazioni consiste in ciò, che la prima è affatto indipendente dalla forza di gravità e che la seconda è basata essenzialmente sull'esistenza di tale forza. La massa determinata nel primo modo dicesi *massa inerte* o *inerziale*; quella determinata nel secondo modo dicesi *massa pesante* o *gravitazionale*. Con la bilancia di Eötvös l'identità della massa inerziale e della massa gravitazionale risulta verificata entro $5 \cdot 10^{-9}$ circa (72, I;

313). Nella teoria newtoniana siffatta identità era accidentale. Nella teoria della Relatività l'identità delle due masse è fondamentale e conduce a una comprensione più profonda dei fatti naturali. « Un romanzo giallo, scrive Einstein (30, *b*; 46), è giudicato di qualità inferiore se spiega fatti strani come accidenti; lo troviamo assai più soddisfacente se non si discosta da una linea razionale. Parimenti, una teoria che offra una spiegazione dell'identità delle due masse — la pesante e l'inerte — è superiore a quella che interpreti tale identità come accidentale, sempre che, beninteso, le due teorie siano ugualmente in accordo con i fatti osservati ». Einstein, partendo da detta identità, che egli chiamava « indizio negletto », giunge ad una nuova rappresentazione dell'Universo.

Riassumendo: i punti deboli della teoria di Newton, rilevati da Einstein, sono essenzialmente tre, « lo Spazio assoluto e il Tempo assoluto », l'« azione gravitazionale a distanza » e l'identità « accidentale » fra massa inerte e massa pesante. Vedremo ora brevemente in che modo egli sia giunto a colmare tali lacune, costruendo la sua Teoria della Relatività (Ristretta e Generale).

CAPITOLO II.

La Relatività Ristretta.

La seconda legge della Dinamica e la trasformazione di Galilei – Principio di Relatività galileiano – Concetto di simultaneità – Principio di Relatività einsteiniano – Principio della costanza della velocità della luce – Ipotesi balistica – L'esperienza di Michelson e l'osservazione di De Sitter (stelle doppie) – Relatività del tempo – « Contrazione di Lorentz » – Trasformazione di Lorentz – Accorciamenti delle lunghezze e dilatazione dei tempi : fenomeni apparenti – Relatività del tempo e dello spazio – La critica di Straneo – Langevin e la storiella dei gemelli – Le esperienze di Caldirola – L'equazione $E = mc^2$ – Parole profetiche di Fermi – Relatività dell'energia – Gli invarianti, rispettivamente, del cronotopo euclideo e del cronotopo pseudoeuclideo – Vettore spaziale e vettore temporale – Tempo proprio – Valore pratico della Relatività Ristretta.

La Relatività Ristretta o Speciale o Particolare o della prima maniera è una prima estensione o generalizzazione della Relatività galileo-newtoniana. La meccanica classica già conosceva un Principio di Relatività. Esaminiamolo. La seconda legge della dinamica si può esprimere mediante le seguenti equazioni differenziali :

$$(62) \qquad X - m\frac{d^2 x}{d t^2} = 0\,; \qquad Y - m\frac{d^2 y}{d t^2} = 0\,; \qquad Z - m\frac{d^2 z}{d t^2} = 0$$

dove : X, Y, Z, sono le componenti di una forza agente sulla massa m; le derivate seconde (rispetto al tempo) delle coordinate x, y, z, sono le componenti dell'accelerazione impressa dalla forza sulla massa m. Chiamiamo K il sistema di coordinate, al quale è riferito il moto della massa m delle (62). Se nessuna forza agisce su m, l'accelerazione è nulla e il punto materiale o si trova allo stato di quiete o si muove con moto rettilineo uniforme : si ha la *legge d'inerzia* o *inerziale*, e galileiano si dirà il sistema K cui è legata la validità di detta legge. Le (62) sono incondizionatamente valide per un osservatore A posto sull'origine del sistema K. Ora A si muova rispetto a K ; scriviamo le equazioni che definiscono il movimento di m rispetto ad A, posto ora sull'origine

O' di un sistema di coordinate K' (x', y', z'), avente gli assi paralleli a quelli di K, e in moto rispetto a K. Le coordinate di m rispetto a K' saranno

$$(63) \qquad x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0$$

dove x_0, y_0, z_0, sono funzioni *qualunque* del tempo e determinano rispetto a K la posizione di $A \equiv O'$. Effettuando la doppia derivazione rispetto al tempo della (63) e sostituendo nelle (62) il moto di m nel sistema K', per la invarianza delle componenti della forza agente, sarà definito dalle equazioni differenziali

$$(64) \qquad X' - m\frac{d^2 x'}{dt^2} = m\frac{d^2 x_0}{dt^2}, \quad Y' - m\frac{d^2 y'}{dt^2} = m\frac{d^2 y_0}{dt^2}$$

$$Z' - m\frac{d^2 z'}{dt^2} = m\frac{d^2 z_0}{dt^2}$$

la cui forma è diversa da quella delle (62): la legge del moto e quella d'inerzia non sono più valide. Se però il moto di A (cioè di K' rispetto a K) è *rettilineo e uniforme*, indicando con u, v, w le componenti, rispetto a K, della velocità di A, avremo

$$(65) \qquad x_0 = ut \quad , \quad y_0 = vt \quad , \quad z_0 = wt$$

Essendo u, v, w costanti, i secondi membri delle (64) sono nulli e le (64) assumono la stessa forma delle (62). La legge fondamentale della Meccanica e la legge d'inerzia sono, dunque, valide in qualsiasi sistema galileiano, ossia in tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme, l'uno rispetto all'altro. Le (62) si riproducono se si applica loro il gruppo di equazioni

$$(66) \qquad x' = x - ut\ , \ y' = y - vt\ , \ z' = z - wt\ , \ t' = t$$

che costituiscono la *trasformazione di Galileo*, che chiameremo G. La quarta equazione è una identità, che implica il postulato secondo il quale, per qualsiasi evento, il tempo, valutato da qualunque osservatore, è indipendente dal sistema di riferimento.

Le equazioni fondamentali della Meccanica, rispetto alla trasformazione G, sono, come abbiam visto, invarianti, cioè la loro forma rimane inalterata, qualunque sia il sistema in moto rettilineo, uniforme) cui si riferiscono. Nessuna esperienza *meccanica*, eseguita nell'interno di un corpo in moto rettilineo uniforme, è capace di rivelare questo moto rispetto ad un sistema di riferimento galileiano. Nell'interno di un treno, in moto rettilineo uniforme, possiamo muoverci, giocare a palla, effettuare qualsiasi atto meccanico, senza poter distin-

guere, mediante tali esperienze, se operiamo sulla terra ferma o nel treno in movimento. L'invarianza delle equazioni della Meccanica può esprimersi enunciando il *Principio di Relatività galileo-newtoniano : le leggi fondamentali, che regolano lo svolgimento dei fenomeni meccanici, sono indipendenti dalla scelta del sistema cartesiano di riferimento fatta tra due sistemi l'uno in moto rettilineo uniforme rispetto all'altro.*

Per le (66) è, com'è ovvio, indipendente dal sistema di riferimento (è un invariante) la valutazione della distanza, per cui si ha :

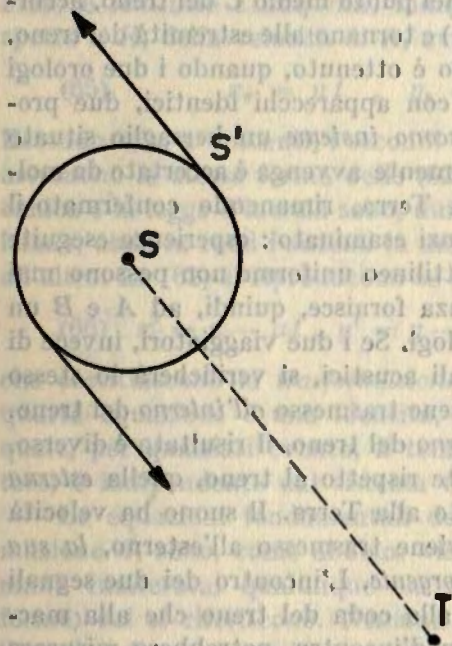
$$(x'_2-x'_1)^2 + (y'_2-y'_1)^2 + (z'_2-z'_1)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

Sui due cardini : « tempus est absolutum » e « spatium est absolutum » si fonda la fisica newtoniana.

Prima di trattare delle celebri esperienze che condussero ad una notevole modificazione della trasformazione (66), esaminiamo con Castelnuovo (21, *b* ; 284) il concetto di *simultaneità*. Due viaggiatori A e B, situati alle due estremità di un treno tubolare chiuso, in moto rettilineo uniforme rispetto alla Terra (considerata quiesciente), vogliono accordare i loro orologi. Essi s'incontrano nel punto medio C del treno, accordano i loro orologi (d'identica fattura) e tornano alle estremità del treno. Allo scopo di assicurarsi che l'accordo è ottenuto, quando i due orologi segnano lo stesso istante, lanciano, con apparecchi identici, due proiettili, per verificare se questi *colpiscono insieme* un bersaglio situato nel punto medio C. Che ciò effettivamente avvenga è accertato da molteplici esperienze già eseguite sulla Terra, rimanendo confermato il Principio di Relatività galileiano dianzi esaminato : esperienze eseguite nell'interno di un sistema in moto rettilineo uniforme non possono mai rivelare questo moto. Detta esperienza fornisce, quindi, ad A e B un mezzo valido per accordare i loro orologi. Se i due viaggiatori, invece di lanciare proiettili, trasmettono segnali acustici, si verificherà lo stesso risultato dei proiettili se il suono viene trasmesso *all'interno* del treno. Ma se la trasmissione avviene *all'esterno* del treno, il risultato è diverso. Mentre l'atmosfera *interna* è in quiete rispetto al treno, quella *esterna* è in quiete (come si suppone) rispetto alla Terra. Il suono ha velocità costante rispetto all'atmosfera : se viene trasmesso all'esterno, *la sua velocità non dipende dal moto della sorgente.* L'incontro dei due segnali acustici si avrà pertanto più vicino alla coda del treno che alla macchina : i viaggiatori, noto tale punto d'incontro, potrebbero misurare la velocità del treno.

I due viaggiatori eseguono ora una esperienza con segnali luminosi. Essi ritengono che non vi sia differenza fra la trasmissione luminosa

all'interno e quella all'esterno del treno. In base alle analogie fra la trasmissione del suono nell'aria e della luce nell'etere, essi si domandano se i due segnali luminosi emessi da A e B quando gli orologi, già accordati, segnano la stessa ora, saranno percepiti simultaneamente dall'osservatore C o se avverrà il contrario; in quest'ultimo caso, come per la trasmissione di segnali acustici all'esterno del treno, essi avrebbero modo di determinare la velocità del treno (rispetto all'etere). Esperienze raffinatissime, come quella di Michelson e Morley (di cui parleremo fra un momento) diedero risultati analoghi a quelli dei proiettili e a quelli dei segnali acustici trasmessi *all'interno* del treno. L'anzidetto postulato di Relatività va, quindi, meglio precisato così: esperienze interne eseguite in un sistema in moto rettilineo uniforme non possono nemmeno rivelare il moto del sistema rispetto all'etere (se pur questo moto ha un senso).

Nell'esperienza dei proiettili si ha la composizione delle velocità: la velocità del treno si aggiunge o si sottrae dalla velocità che avrebbe il proiettile se il treno stesse fermo, ciò che può verificare con grande approssimazione un osservatore fermo sulla strada ferrata. Per le propagazioni luminose si verificherà la stessa legge di composizione? Riferiamo una famosa osservazione, dovuta a De Sitter (71, *a*; 357) relativa alle cosidette «stelle doppie». Una stella è costituita da due stelle, S ed S', ruotanti intorno al comune baricentro; supponiamo, per semplicità, che S sia ferma rispetto alla Terra, T, e che S' ruoti con velocità v intorno ad S in un piano passante per T. Se valesse la legge di composizione delle velocità (*ipotesi balistica*), la velocità della luce emessa da S' verso la Terra sarebbe $c + v$ quando il vettore v è diretto verso la Terra, $c - v$ nel caso opposto. Ora, anche una piccola differenza di velocità, su una distanza grande quale è quella della stella dalla Terra, dovrebbe condurre, nel percorso, a notevoli differenze di tempo (di ore e, anche,

di giorni), e quindi anche a notevoli deformazioni nella legge del moto della stella, deformazioni che, anche con le più accurate osservazioni, non si sono mai trovate. Majorana, valente sperimentatore e critico severo delle teorie einsteiniane, affrontò la difficilissima verifica sperimentale diretta della *indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente* (che Einstein aveva assunto come *postulato della costanza della velocità della luce*) impiegando dapprima sorgenti luminose e poi specchi riflettenti in rapido movimento. Ma da quelle esperienze non seguì il risultato che l'abile sperimentatore si attendeva, bensì una piena conferma del postulato einsteiniano, che egli lealmente pubblicò (85; 99). La luce, dunque, in quanto non consente esperienze che rivelino lo stato di moto della sorgente, si comporta come il segnale acustico *all'interno* del treno, mentre, in quanto la sua velocità non si compone con la velocità della sorgente, si comporta come il segnale acustico *all'esterno* del treno. Questi fatti sono apparentemente contradditori. Esaminiamoli più da vicino.

I due postulati, di cui abbiamo parlato, furono enunciati da Albert Einstein così (30, *e*; 482):

1) « Le leggi, secondo le quali variano gli stati dei sistemi fisici, sono indipendenti dal fatto che codesti cambiamenti di stato vengono riferiti all'uno o all'altro di due sistemi che si trovano in reciproca relativa traslazione uniforme (*Principio della Relatività*) ».

2) « Ogni raggio di luce si muove nel sistema di coordinate *in quiete* con la velocità fissa *c*, indipendente dal fatto che questo raggio sia stato emesso da un corpo in riposo o in moto, intendendo velocità $= \dfrac{\text{cammino luminoso}}{\text{tempo impiegato}}$ (*Principio della costanza della velocità della luce*) ».

Quindi i dati d'esperienza, ripetiamo, sono questi:

1) L'esperienza di Michelson e Morley mostra che « l'etere » viene trascinato dai corpi in moto insieme con la sorgente luminosa, e pertanto nessuna esperienza ottica, eseguita nell'interno di un corpo, può rivelare il moto di traslazione rettilinea uniforme del corpo rispetto a un sistema galileiano; pertanto l'idea di un riferimento privilegiato per i fenomeni elettromagnetici deve essere abbandonata. Su tale dato di esperienza poggia il primo postulato di Einstein.

2) L'osservazione di De Sitter mostra che, contrariamente a quanto ci si aspetterebbe dall'esperienza di Michelson, « l'etere » *non* viene trascinato dai corpi in moto; la velocità della luce, rispetto ad

un dato sistema di riferimento (privilegiato), non si compone con la velocità della sorgente. Su tale dato d'esperienza poggia il secondo postulato di Einstein.

« Oltre le predette due possibilità, scrive Einstein (30, *b* ; 177), ne possiamo immaginare una terza più complicata e cioè che l'etere venga trascinato solo parzialmente dal corpo in moto, insieme con la sua sorgente luminosa. Sarebbe tuttavia fuori posto discutere la supposizione più complicata, prima di sapere in favore di quale dei due casi limite si pronuncia l'esperienza ».

A proposito dell'esperienza di Michelson, Severi (83 ; 314) scrive : « Che il pensiero dell'Autore (Einstein) abbia ricevuto l'ultimo decisivo impulso alla costruzione della Teoria della Relatività dalla volontà di spiegare il risultato negativo della celebre esperienza di Michelson (1881) e Morley (1887 ; 1904 ; 1905) ha scarsissima importanza, tanto più che un più approfondito esame mostra che l'esperienza stessa non può discriminare l'ipotesi basilare della Relatività Ristretta (ipotesi di Fresnel-Einstein dell'indipendenza della velocità della luce dalla velocità della sorgente) dall'ipotesi contraria, detta ipotesi balistica (di Arago-Ritz della composizione della velocità della luce con quella della sorgente) ».

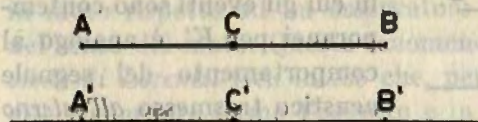
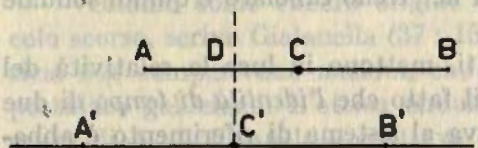
Oltre all'esperienza di Michelson, altre ne furono escogitate allo scopo di rendere evidente il moto della Terra. Trouton e Noble dimostrarono con grande esattezza la non esistenza di un impulso rotatorio su un condensatore opportunamente sospeso, che la teoria classica degli elettroni prevede, al momento della carica, come conseguenza del moto traslatorio della Terra (85, *a* ; 80). Orientando in direzione obliqua, rispetto a quella del moto della Terra, un condensatore piano, carico, secondo la teoria elettronica, si dovrebbe osservare una coppia di forze tendente a disporre la superficie del condensatore parallelamente al moto della Terra, ciò che invece non si osserva affatto.

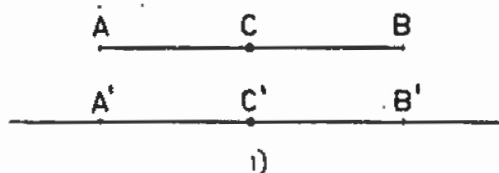
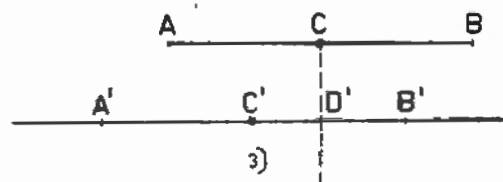
Alla lista degli esperimenti con risultato nullo, escogitati per rivelare il moto di traslazione della Terra, si aggiunse quella di Trouton e Rankine, i quali si proponevano di porre in evidenza la presumibile variazione di resistenza elettrica di un filo conduttore orientato, ora parallelamente, ora normalmente, alla direzione del moto della Terra.

Per quanto riguarda i due principî di relatività, se li accettiamo come dati di esperienza, dobbiamo anche accoglierne le conseguenze ed esaminare la causa della apparente loro contraddittorietà. Passiamo quindi a questo esame.

Per definire la contemporaneità di due eventi accadenti in due punti distanti A e B, assumiamo il seguente criterio : si facciano partire

due segnali luminosi da A e da B nell'istante in cui i due eventi accadono: se questi segnali giungono nello stesso istante nel punto medio C di AB i due eventi si diranno simultanei o contemporanei. Se i due eventi sono le accensioni di due lampade, una situata in A e l'altra in B, diremo simultanee le due accensioni se sono percepite nello stesso istante da un osservatore situato in C o, più in generale, in un punto qualsiasi del piano perpendicolare al segmento AB e passante per l'asse a di AB.

Seguiamo, con Persico, il seguente ragionamento (71, *a*; 367): Sia K' un osservatore sulla strada e K un osservatore sul solito treno AB in moto uniforme da sinistra verso destra. I due eventi siano la accensione di due lampade, una alla testa B e l'altra alla coda A del treno; A e B, negli istanti dell'accensione, coincidono con i punti A' e B' della strada. Le due accensioni siano simultanee per K', ossia, secondo il nostro criterio di contemporaneità, i due segnali luminosi giungono contemporaneamente in C', punto medio di $A'B'$. La fig. 1) rappresenta la posizione del treno e della luce all'istante dell'accensione delle lampade e la fig. 2) all'istante dell'arrivo della luce in C'. Le figure sono fatte dal punto di vista di K': siffatte figure rappresentano lo stato di cose *in un determinato istante* ed ha senso, quindi, soltanto per uno dei due osservatori; per l'altro osservatore le varie parti della figura rappresentano posizioni non contemporanee. Ora, nell'intervallo di tempo, nel quale i due segnali viaggiano per raggiungere C', il treno si è spostato, e l'incontro dei segnali, quindi, non avviene nel punto medio C del treno, ma più verso A, e cioè in un punto D. Pertanto, per l'osservatore K, i due eventi non soddisfano la definizione di contemporaneità: la lampada A, per K, è stata accesa *dopo* B.

Consideriamo ora il caso in cui i medesimi eventi siano simultanei per K.

Analogamente al primo caso, la fig. 1) rappresenta la posizione del treno e della luce all'istante dell'accensione delle lampade in A e in B, e la fig. 3) all'istante dell'arrivo della luce in C. Le figure son fatte qui, ovviamente, dal punto di vista di K. Ora, nell'intervallo di tempo, nel quale i due segnali viaggiano per raggiungere C, il treno si è spostato e l'incontro dei segnali, quindi, non avviene nel punto medio C' di A' B', ma più verso B', e cioè in un punto D'. Per K' la lampada A è stata accesa *prima* di B. Eventi contemporanei per K non lo sono per K', eventi contemporanei per K' non lo sono per K. Qui sta il nocciolo della apparente contraddittorietà dei due postulati di Einstein. Il caso analizzato, in cui gli eventi sono contemporanei per K', è analogo al comportamento del segnale acustico trasmesso *all'esterno* del treno (la sua velocità era valutata rispetto all'atmosfera solidale con la Terra). Il secondo caso è analogo al comportamento del segnale acustico trasmesso *all'interno* del treno (la sua velocità era valutata rispetto all'aria racchiusa nel treno tubolare e quindi solidale con questo).

1)

3)

I risultati, cui siamo pervenuti, mettono in luce la relatività del tempo. Del resto, annota Persico, il fatto che *l'identità di tempo* di due eventi (in luoghi diversi) sia relativa al sistema di riferimento è abbastanza analogo all'altro fatto, generalmente accettato senza difficoltà, che *l'identità di luogo* di due eventi (non simultanei) è relativa al sistema di riferimento (se, per es., una lampada in un treno viene accesa e poi spenta, i due eventi avvengono *nello stesso luogo* per un osservatore situato nel treno o che si riferisca al treno, e *in luoghi diversi* per un osservatore situato nella strada o che si riferisca alla strada).

« È grande merito di Einstein, scrive Castelnuovo (21, b ; 288) di aver stabilito che la credenza nel valore assoluto della simultaneità, perpetuatasi attraverso millenni, è metafisica. Solo il presentarsi di due eventi nello stesso luogo e nello stesso istante è un fatto che ha carattere assoluto, indipendente dall'osservatore ».

Il nostro treno in corsa ci permette un'altra deduzione. Ci riferiamo alle figg. 1) e 3). Esse rappresentano la simultaneità dei due eventi considerati dal punto di vista di K: pertanto diciamo che gli orologi, situati alle estremità A e B del treno, all'istante dell'accensione delle lampade, segnano zero. Per K la lunghezza del treno è la distanza $AB = A'B'$ tra le posizioni occupate dai due estremi del treno al tempo zero. Per un osservatore sulla strada, che volesse misurare detta lunghezza, la cosa è diversa. A' e B' sono le posizioni occupate, rispettivamente, dalla coda del treno e dalla macchina, quando gli orologi di A' e B' segnano ore diverse, ad es., rispettivamente, zero ed 1 (al tempo zero è stata accesa la lampada A, al tempo 1 la lampada B). Per determinare la lunghezza del treno, a K' occorre sapere quale posizione B'' occupava la macchina B nell'istante in cui l'orologio, fermo sulla strada, segnava zero; poichè B'' precede B' del tratto che la macchina ha percorso in una unità di tempo, la lunghezza del treno $A'\ B''$, quale appare a K', è inferiore alla lunghezza del treno misurata da K. Gli oggetti, in moto rispetto ad un osservatore fisso, a questi appaiono accorciati nel senso del moto. Questo fenomeno, su cui torneremo, è detto *contrazione di Lorentz.* Ben inteso che, per la relatività del movimento, è lecito riguardare fermo l'oggetto e in moto l'osservatore.

Tutte queste considerazioni qualitative di carattere intuitivo si traducono in valutazioni quantitative, stabilendo le formule, che legano le coordinate di spazio e di tempo di uno stesso punto riferito a due sistemi in moto di traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro.

Vediamo come ebbero origine tali formule. « Al principio del secolo scorso, scrive Gialanella (37 ; 15), sorgeva un ramo della fisica teorica, ove comparivano nozioni, che non sembravano accordarsi con il postulato galileiano. L'ottica ondulatoria, sviluppata specialmente per opera di A. J. Fresnel, ammetteva che la luce si propagasse mediante vibrazioni di un mezzo — l'etere cosmico — in quiete assoluta, attraverso al quale si muovevano, senza attrito, i corpi celesti. Si presumeva, pertanto, che esperienze ottiche o elettromagnetiche riuscissero a rivelare il moto dei corpi rispetto all'etere, moto che avrebbe potuto riguardarsi come assoluto ». Si pensi al fenomeno analogo, che abbiamo illustrato, del segnale acustico, che, se trasmesso *all'esterno* del treno, darebbe modo ai nostri viaggiatori di misurare la velocità del treno. « Tuttavia, continua Gialanella, i tentativi fatti nella prima metà del secolo scorso da D. F. J. Arago e da altri, per determinare, con esperienze ottiche terrestri, la velocità (rispetto all'etere) della Terra, nel suo moto annuo lungo l'eclittica, velocità che si riteneva non inferiore ai

30 chilometri al secondo, a nulla riuscirono. Nè miglior esito ebbe l'ingegnosissima esperienza che A. A. Michelson (ispirandosi forse a una suggestione di Maxwell, 1878) progettò nel 1881 ed eseguì alla fine di quell'anno insieme con E. W. Morley; la esperienza fu poi ripetuta centinaia di volte in condizioni svariate. Questa esperienza, che avrebbe potuto rivelare un *vento d'etere* anche inferiore ai 30 km. al sec., dimostrò che il movimento della Terra non ha influenza sulle propagazioni luminose. Le esperienze di Arago miravano a determinare mediante misure *puramente terrestri* il rapporto v/c della velocità della Terra alla velocità della luce, rapporto il cui valore di circa 10^{-4} risulta da osservazioni astronomiche — ad es. dal fenomeno della aberrazione della luce —; che per via astronomica si riesca a valutare il detto rapporto non deve sorprendere trattandosi di un effetto di moto relativo della Terra rispetto alle stelle fisse. L'insuccesso di quella esperienza fu spiegato verso la fine del secolo scorso di H. A. Lorentz, il quale dimostrò che, per il modo stesso come le esperienze erano concepite, gli effetti del prim'ordine (cioè dell'ordine di grandezza di v/c) dovevano necessariamente sfuggire all'osservazione. La esperienza di Michelson e Morley avrebbe dovuto rivelare effetti del secondo ordine (cioè dell'ordine di $v^2/c^2 = 10^{-8}$). Essa consiste sostanzialmente nel far percorrere a un raggio luminoso due cammini uguali di andata e ritorno — l'uno nella direzione in cui la Terra si muove lungo l'eclittica, l'altro in direzione perpendicolare — e nel valutare, mediante misure interferenziali, la differenza dei tempi richiesti dall'uno e dall'altro percorso. L'esito negativo parve, in un primo momento, inesplicabile ». H. A. Lorentz, per spiegare il risultato dell'esperienza di Michelson, avrebbe potuto semplicemente rinunciare alla sua convinzione che le esperienze ottiche, a differenza di quelle meccaniche, dovessero rivelare il moto traslatorio della Terra rispetto all'etere; egli, invece, propose una ipotesi, secondo la quale i corpi in moto subirebbero una contrazione nella direzione del moto (*contrazione di Lorentz*). Bastava supporre, egli diceva, che tutto l'apparecchio, a cagione del moto traslatorio della Terra, si dovesse contrarre secondo la direzione di quel moto, nel piccolissimo rapporto di $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (v = velocità della Terra, c = velocità della luce). G. Fitz Gerald aveva per primo proposto tale interpretazione approssimata della relatività ottica. Lorentz, indipendentemente, vi era giunto nel 1895; egli propose un gruppo di equazioni, da sostituire alla trasformazione (66), che avrebbero dato ragione della inesistenza

non solo degli effetti del 1° ordine, ma anche del fenomeno del 2° ordine, posta in evidenza dalle esperienze di Michelson. Le equazioni erano le seguenti :

$$(67) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; , \; y' = y \; , \; z' = z \; , \; t' = t - \frac{v\,x}{c^2}$$

le quali, però, non rendevano esattamente conto dei fenomeni anzidetti.

Qualche anno dopo (1903-4) Lorentz riprese il problema da un altro punto di vista, proponendosi di apportare alla trasformazione G quelle modificazioni che consentissero l'invarianza delle equazioni fondamentali della teoria elettronica. Lorentz scrisse un gruppo di equazioni, le prime tre identiche alle prime tre delle (67), l'ultima notevolmente modificata ; ma anche queste equazioni non erano esatte, come ammise lo stesso Lorentz, perchè non lasciavano rigorosamente invariate le equazioni fondamentali della teoria degli elettroni. « Per la risoluzione approssimata, scrive Straneo (85, *a* ; 81), della questione inerente le equazioni di trasformazione da impiegare per render conto della relatività ottica, Poincaré osservava : è chiaro che non è possibile procedere definitivamente ritoccando le equazioni di trasformazione approssimata, per interpretare i nuovi fenomeni che si scoprono, come, almeno apparentemente, si è fatto, applicando l'ipotesi della contrazione per interpretare l'esperienza di Michelson ; è meglio trovare formule esatte, valevoli in ogni caso, tanto più che queste differiscono solo in qualche particolare da quelle di Lorentz. Così Poincaré giunse a una trasformazione esatta che continuò a denominare trasformazione di Lorentz ».

In base alla teoria matematica dei *gruppi* si può dimostrare rigorosamente che le sole trasformazioni, che lasciano invariata la *forma* delle leggi ottiche, sono date da equazioni del tipo (85, *a* ; 81)

$$(68) \quad x' = \frac{k}{l}\,(x - \varepsilon t) \; , \; y' = y \; , \; z' = z \; , \; t' = \frac{k}{l}\,(t - \varepsilon x)$$

dove $k = \dfrac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$ e l ed ε sono costanti da determinare. Può porsi intanto $l = 1$. Le (68), per l'arbitrarietà di ε, sono equivalenti a quelle da cui era partito Lorentz. La teoria generale dei gruppi implica che ogni sua soluzione di un generico problema (matematico, geometrico, fisico...), che si risolva in un gruppo, debba contenere una costante arbitraria che si ritrova identica in ognuno degli elementi del gruppo. Tale

costante è poi da determinare in base a qualche condizione particolare del problema che ci si è posto. Nella ricerca di una legge di trasformazione uniforme, che lasci invariata la forma delle leggi fondamentali elettromagnetiche, si applicano le (68) ad un caso sperimentale, come quello di Michelson, e, uguagliandone i risultati, si potrà determinare anche il valore numerico della costante. *Ponendo* $\varepsilon = \frac{c}{v}$, *con* $v =$ *velocità traslatoria del sistema, in ogni caso si ritrova per* c *il valore della velocità della luce.* Poincaré ottenne così le equazioni esatte, universalmente note come le equazioni (di trasformazione) di Lorentz

$$(69)\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ,\ y' = y\ ,\ z' = z\ ,\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Le formule inverse si possono ottenere sia risolvendo il sistema (69) rispetto a x, y, z, t, sia, più semplicemente, per il principio di relatività scambiando x, y, z, t, con x', y', z', t', e v con $-$ v : esse sono quindi

$$(69)'\quad x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ,\ y = y'\ ,\ z = z'\ ,\ t = \frac{t' + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Se in queste formule si fa tendere c all'∞, ritroviamo la trasformazione di Galileo. Se, cioè, i segnali luminosi si propagassero istantaneamente, varrebbero le (66). In tutti i casi, pertanto, in cui non intervengono moti con velocità confrontabile con c, vale la trasformazione classica, che è, quindi, un caso particolare della trasformazione lorentziana. Osserviamo subito la notevole circostanza che la velocità di un corpo non può mai raggiungere nè superare la velocità della luce : per $v = c$ si avrebbe $x = \infty$ e $t = \infty$; per $v > c$ si avrebbero per x e t valori immaginari.

Albert Einstein pervenne allo stesso risultato per altra via. Essendo x, y, z, t le coordinate e il tempo di un sistema S, e x', y', z', t' le coordinate e il tempo di un sistema S', in moto rettilineo uniforme rispetto al primo, per passare dalle coordinate e dai tempi del sistema S a quelli del sistema S', nella trasformazione deve essere soddisfatta la condizione che, se nel sistema S la luce si propaga con la velocità c, essa si propaga con eguale velocità anche nel sistema S', poichè si ha, per la propagazione di uno sprazzo di luce sferico partito all'istante $t = 0$ dalle origini dei due sistemi, in quell'istante coincidenti,

$$(70)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{e} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c t'^2$$

Con una serie di considerazioni e pochi passaggi, che possono leggersi nella memoria di Einstein del 1905 e in numerosi trattati, Einstein

pervenne a equazioni di trasformazione identiche alle (69) dedotte da Poincaré.

« Se Einstein, osserva Straneo (85, *b* ; 238), fosse stato al corrente della teoria dei gruppi e la avesse applicata nella sua ricerca relativistica, come, circa nello stesso tempo, fece Poincaré per perfezionare le solo approssimate deduzioni di Lorentz, si sarebbero risparmiate innumerevoli e inconcludenti polemiche a una questione che aveva sopratutto il difetto di essere stata mal posta ». Straneo si riferisce alle polemiche sorte attorno al 2º postulato di Einstein.

Esaminiamo alcune conseguenze delle (69). Siano K' un osservatore e K un altro osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. K e K' misurino una sbarra parallela all'asse delle x e solidale con K. K' dovrà, in un dato istante, segnare sull'asse delle x le posizioni simultanee dei due estremi della sbarra e poi misurare la distanza fra i due segni. Rileviamo subito che la prima operazione è effettuata nello spazio ottico. Detti A e B i due eventi costituiti dal tracciamento dei segni da parte di K', supponiamo che essi avvengano al tempo zero ($t_A = t_B = 0$). La lunghezza della sbarra, misurata da K', è

$$l' = x'_B - x'_A \qquad (x'_B > x'_A)$$

Per K la lunghezza è, invece,

$$l = x_B - x_A \qquad (x_B > x_A)$$

Per la (69)' si ha

$$x_A = \frac{x'_A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad x_B = \frac{x'_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e quindi

$$x_B - x_A = \frac{x'_B - x'_A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ossia

$$l' = l \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{71}$$

Pertanto la lunghezza l' della sbarra in movimento rispetto all'osservatore K' e misurata da K' è minore della lunghezza l della sbarra in quiete rispetto allo osservatore K e misurata da K. Abbiamo trovato il valore quantitativo di questo « accorciamento » già da noi esaminato qualitativamente. Poichè *una grandezza fisica è definita dal procedimento che serve a misurarla*, dovremmo dare due nomi distinti a queste due differenti lunghezze l', l, la prima ottenuta, come abbiamo visto, operando nello spazio ottico la seconda ottenuta operando nello spazio sol-

tanto tattile, semplicemente riportando lungo la sbarra data un regolo unità (o un suo sottomultiplo) il numero necessario di volte. Chiameremo *lunghezza della sbarra in moto* la prima, *lunghezza di quiete* la seconda. Sorgono ora questi interrogativi. Quale è la «vera» lunghezza della sbarra? Quale la lunghezza «vera» e quale la lunghezza «apparente»? Si tratta di un accorciamento «reale» della sbarra? Conveniamo con Castelnuovo (21, *b*; 290) di chiamare *vera, reale* la lunghezza di quiete, ottenuta nello spazio tattile, e *apparente* la lunghezza della sbarra in moto, ottenuta nello spazio ottico. Se l'osservatore K', misurata la lunghezza apparente l' della sbarra, vuol conoscere la sua lunghezza reale l, la lunghezza cioè misurata da K, solidale con la sbarra, non ha che ricavare l dalle (71) e scrivere

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{72}$$

La questione sulla realtà o apparenza degli accorciamenti sorse quando Lorentz fece l'ipotesi della sua «*contrazione*», riferendosi allo spazio tattile. «Lorentz, scrive Straneo (85, *b*; 233), che in un primo tempo, avendola creduta reale, aveva cercato di interpretare la contrazione dei corpi materiali, secondo la direzione del loro moto nell'etere, in base alla loro costituzione atomica, passò poi anche lui ad attribuirla senz'altro alla pura nozione di misura». Insistere sulla *realtà* degli accorciamenti, come fanno alcuni (cioè su accorciamenti che noi verificheremmo se, potendoci trasferire, per ipotesi, sulla sbarra in moto, realizzassimo la sua misurazione), significa non tener conto che il tempo non è assoluto, come risulta dalle equazioni di Lorentz, ma funzione delle coordinate spaziali del sistema di riferimento (*tempo proprio o locale*). Si pretende applicare, per un verso, la trasformazione di Lorentz, calcolando con questa gli «accorciamenti», affermando poi, per altro verso, che gli «accorciamenti» sono reali, ciò che equivale a riferirsi alla trasformazione di Galilei, dove $t = t'$! Si mescolano insieme concezioni relativistiche e concezioni assolutistiche, ciò che è assurdo.

Un'altra conseguenza della trasformazione di Lorentz è la cosidetta «dilatazione dei tempi». L'intervallo di tempo fra due eventi non risulta in generale lo stesso per l'osservatore K e per l'osservatore K'.

Abbiamo visto come la prima delle (69)', applicata a due punti di x mobili lungo l'asse x' e considerati *nello stesso istante t' per l'osservatore fisso K'*, fa vedere che la distanza l' dei due punti, quale appare a K', è minore della distanza l misurata da K. In modo analogo, applicando l'ultima delle (69)' a due eventi che si verifichino *nello stesso punto x*

del sistema mobile, in istanti diversi t_1, t_2, si trova che l'intervallo di tempo τ', misurato dall'orologio fisso, è legato all'intervallo $\tau = t_2 - t_1$, misurato dall'orologio mobile, dalla relazione

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{73}$$

L'intervallo appare a K' più lungo dell'intervallo vero, verificato da K, come se il moto allungasse i tempi per l'osservatore fisso (*dilatazione dei tempi*) o rallentasse rispetto ad esso gli orologi in moto.

Anche qui non abbiamo che da ripetere quanto abbiamo detto per gli « accorciamenti » delle lunghezze. Se l'osservatore fisso K', dopo avere osservato i tempi segnati dagli orologi di K, e cioè l'intervallo apparente τ' dei due eventi accaduti nel sistema mobile K, vuol conoscere il *vero* intervallo τ, quello letto da K negli orologi con lui solidali, non ha che ricavare τ dalla (73) e scrivere

$$\tau = \tau' \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{74}$$

Che si tratti di « accorciamenti » di lunghezze e « dilatazioni » di tempi puramente apparenti risulta evidente, oltre che dalle considerazioni già dette, dal semplice fatto che la trasformazione di Lorentz è invertibile. La sbarra solidale con K, che K' vedeva accorciata, situata invece nel sistema K' apparirà accorciata a K. L'intervallo di tempo di due eventi accadenti in K appare dilatato a K', ma se i due eventi accadono in K' sarà K a considerare dilatato il loro intervallo. Il fatto che il tempo sia relativo al sistema di riferimento può risultare poco intuitivo a causa del fatto che nella nostra esperienza quotidiana noi possiamo trascurare il tempo di propagazione della luce e siamo abituati a non far differenza fra « veduto simultaneamente » e « accaduto simultaneamente » e ne risulta confusa la differenza fra tempo e tempo locale. A dar la stura ad amene storielle sulla « dilatazione » dei tempi fu lo stesso Einstein. Il Prof. Paolo Straneo, già citato più volte, professore di Fisica matematica nell'Università di Genova, autore di numerosi saggi sulla Relatività, pubblicati in Italia e all'estero, che all'età di 22 anni conobbe Einstein appena diciassettenne e ne divenne amico personale, e che ha compreso e apprezzato in tutta la sua immensa portata il pensiero del celebre novatore, così scrive in proposito (85 *b*; 233): « Einstein, nella sua stessa memoria fondamentale, propose una inammissibile applicazione del ritardo dei tempi osservati da un sistema all'altro. Egli suppose, in un sistema fisso K, tre orologi sincroni, A e B, vicini fra di loro e C molto lontano da essi. *Sorvolando sulla validità della sua teoria limitata a soli sistemi in relativa traslazione uni-*

forme, suppose che l'orologio B partisse nella direzione di C movendovesi rettilineamente con velocità costante v fino a raggiungerlo. Un osservatore fisso in K presso l'orologio A, osservando (misurando) il tempo dell'orologio B, avrebbe dovuto riscontrare in esso un ritardo sul proprio. È a questo punto che Einstein suppose senz'altro che codesto ritardo teorico (secondo le equazioni di Lorentz) dovesse venir anche *materialmente* segnato dallo orologio B e che quindi, quando esso raggiungesse C (sincrono con A) non fosse più in accordo con esso. Continuando poi a trascurare, in seguito, la presupposta condizione dell'inerzialità dei sistemi ammessi dalla teoria, suppose che l'orologio B descrivesse uniformemente una poligonale, ritornasse presso A e ivi si arrestasse. Allora esso, sorvolando sulle violazioni dei presupposti della teoria, or ora denunciate, avrebbe dovuto in tale caso venirsi a trovare in un più o meno sensibile ritardo rispetto ad A. Il seguito è notissimo. Il valente fisico P. Langevin, grande amico di Einstein, immaginò un viaggio più interessante : suppose che uno di due giovani gemelli partisse con velocità fantastica dalla Terra, spingendosi fino a una lontana stella, ritornasse poi con la stessa velocità invertita sulla Terra e vi si arrestasse. Supponendo la velocità di traslazione v sufficientemente grande (prossima a quella della luce), il gemello che aveva viaggiato sarebbe potuto risultare ancor bambino, mentre l'altro, rimasto costantemente sulla Terra, sarebbe dovuto risultare vecchissimo ! Ora codesto paradossale effetto dell'apparente lento fluire del tempo tra sistemi in relativo rapido moto traslatorio viene prospettato, con la più palese violazione delle più fondamentali condizioni per la validità della Teoria della Relatività Ristretta, come elemento vantaggioso allo sviluppo della futura astronautica in varie trattazioni scientifico-tecniche e in congressi, in pieno dispregio della serietà della scienza ».

Ricordo di aver fatto notare recentemente a un professore di Fisica teorica presso una Università italiana la sua errata interpretazione delle equazioni di Lorentz, nel modo rilevato da Straneo, e rimasi stupito dalla sua singolare pertinacia nel voler restare nelle sue posizioni. Per quanto riguarda Einstein, il comportamento fu naturalmente diverso : a quel suo paradosso degli inizi egli non accennò più in nessuna delle riesposizioni e generalizzazioni della sua concezione relativistica. Può dirsi che, indirettamente, chiariva la questione quando più tardi scriveva (30, *e* ; 110) : « Secondo la Teoria della Relatività Ristretta, le coordinate di spazio e di tempo hanno ancora un carattere assoluto nelle dimensioni in cui sono direttamente misurabili con corpi ed oro-

logi rigidi. Hanno invece carattere relativo nei limiti in cui dipendono dallo stato di movimento del sistema d'inerzia scelto ».

« La causa di tanto paradosso, continua Straneo, risiede, dunque, in due illeciti arbitrii : 1) L'aver ammesso che il ritardo si manifesti localmente, potremmo dire materialmente, *in uno solo dei sistemi in moto relativo*, mentre proprio per il principio di relatività, in base al quale si afferma di prevederlo, tale ritardo, come qualsiasi altra perturbazione (reale o astratta) dovuta al moto relativo, dovrebbe apparire ugualmente (ma non segnalata materialmente dagli orologi) ai due osservatori dei due sistemi ; 2) l'aver introdotto accelerazioni positive e negative e inversioni di marce incompatibili con la limitazione della teoria che si pretende applicare, fondamentalmente limitata a sistemi inerziali, quindi in sola relativa traslazione uniforme ».

Quanto all'illustre fisico teorico Max Born, cui si appoggiano alcuni partigiani dell'ameno paradosso, così prezioso per pubblicazioni di fantascienza, egli, dopo qualche calcolo solo approssimato, osserva che è decisivo il fatto che solo uno degli orologi è stato sottoposto ad accelerazioni e che quindi il problema deve venir trattato in base alla Teoria della Relatività Generale. Straneo fa però osservare subito che « l'invocato fenomeno della Relatività Generale è di un ordine di grandezza assolutamente insufficiente per interpretare il ritardo in questione ». A parte, però, l'aspetto quantitativo, qualitativamente le cose, nella Relatività Generale, vanno in maniera assai diversa. I fenomeni di ritmi rallentati nella Relatività Generale sono effettivi, reali ; di questo parleremo nel prossimo capitolo.

Soffermiamoci ancora un momento sulla interpretazione della trasformazione di Lorentz. Caldirola, (18 ; 386) riferendosi alla (73), scrive : « Si suole parlare, sia pure impropriamente, di rallentamento di un orologio per effetto del suo moto ». E più sotto : « Per la verifica sperimentale di tale legge esamineremo due particolari fenomeni : la dipendenza dalla velocità della vita media del mesone μ e l'effetto Doppler trasversale ».

Straneo, rispondendo ad una mia lettera, in data 1º febbraio 1958, mi scriveva : « Rispondo alla sua domanda : che valore hanno le verifiche sperimentali di Caldirola e di altri ? La risposta categorica è : *Nessun valore !* Esse sono la conseguenza di una assurda mescolanza di concezioni relativistiche e di concezioni assolutistiche, cioè contrarie (almeno in qualche punto), le quali necessariamente producono quello che, a proposito sia della Relatività, sia della Teoria dei Quanti, Poincaré aveva tanto deprecato ed esortato ad evitare, dicendo : *non c'è*

paradosso che non si possa dimostrare quando si mescolino nelle premesse della dimostrazione due affermazioni (o ipotesi) *contrarie.* Ad ogni modo basta pensare che l'orologio del sistema S non può segnare in alcun modo un ritardo effettivo R_1, perchè lo osserva un osservatore O_1 di un sistema S_1, che si trova in una data traslazione uniforme di velocità v_1 relativamente ad S, perchè *lo stesso orologio* dovrebbe segnare contemporaneamente altri ∞^3 *ritardi differenti* quando fosse osservato da osservatori degli ∞^3 possibili sistemi in traslazioni uniformi rispetto a S (cioè nelle ∞^2 direzioni, con le ∞ velocità). Questa logica obiezione *impone* di ammettere che è la stessa *nozione di valutazione del tempo* (e analogamente delle lunghezze secondo la direzione del moto relativo) quella che fa apparire un ritardo relativo dei tempi osservati fra due sistemi in relativa traslazione. In caso contrario, invece di distruggere lo spazio e il tempo assoluto, se ne sarebbero creati altri ∞^3... È pure deplorevole che anche oggi non pochi fisici si attacchino a una pretesa *più lunga vita dei mesoni in rapido movimento,* senza pensare che un osservatore, fisso con uno di quei mesoni, considererebbe i mesoni fissi (o quasi) rispetto a noi, come in moto rapido rispetto a lui, e quindi attribuirebbe loro la stessa lunga esistenza che noi attribuiamo a quelli presso di lui. E Caldirola cade nello stesso equivoco! » E in altra lettera, in data 12 febbraio 1958, Straneo mi scriveva ancora: « Bisogna decidersi. O si ragiona *sempre* relativisticamente o si rimane classici. La via intermedia conduce ad assurdi ». Straneo pone la questione nei suoi giusti termini.

In aggiunta a quanto egli dottamente spiega e corregge, dirò che una chiara distinzione fra spazio ottico e spazio tattile (vedasi la Parte I) pone in maggiore evidenza la diversità dei procedimenti adottati per misurare lunghezze e intervalli di tempi, e poichè, come dicemmo, una grandezza fisica è definita dal procedimento che serve a misurarla, dobbiamo rigorosamente distinguere fra le lunghezze e i tempi misurati da un osservatore solidale con gli orologi da osservare e con gli oggetti da misurare e le lunghezze e i tempi misurati da un osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. L'osservatore solidale, nel senso ora detto, effettua misure *tattili;* quello mobile misure *ottiche.*

Un'altra causa di errore è la insufficiente distinzione che si fa, da alcuni, fra Geometria e Fisica, fra astrazione matematica e mondo concreto. Nella Parte I abbiamo trattato ampiamente l'argomento. Diciamo subito che le equazioni di Lorentz non possono dire di più di quanto contengono. Carlson scrive in proposito (19; 393): « La matematica non inventa nulla; le formule matematiche non potranno mai

e poi mai dirci di più di quanto è contenuto nei termini della formula ». E Bridgman (16 ; 155) : « Ragionamenti puramente matematici non possono mai dare risultati fisici, e se qualcosa di fisico vien fuori dalla matematica vi deve essere stato introdotto prima in altra forma ». Tonini, per es., insiste affermando la reale contrazione di Lorentz (che, come abbiam visto, lo stesso Lorentz in seguito rifiutò). Scrive infatti Tonini (88, *b* ; 66) : « La reale necessaria contrazione di un corpo mobile entro uno spazio fisico è, secondo noi, una necessità strutturale : solo un fluido più denso riesce a costituire sistema mobile in una atmosfera più rarefatta ». Questo discorso non ha nulla a che fare con le equazioni di Lorentz. « In assenza di materia ed energia, scrive Finzi (35, *b* ; 205) lo spazio-tempo deve ritenersi *pseudo-euclideo*... Un corpuscolo in tale spazio-tempo è isolato da ogni altro corpo ed è sottratto ad ogni circostanza fisica. « Straneo afferma ancora (85, *b* ; 237) : « Sorse il problema della formulazione della correlazione sussistente fra i non più assoluti e non più separabili concetti di spazio e di tempo ; correlazione che nulla induceva a pensare dovesse essere semplice e indipendente da altre entità che potevano intervenire negli svolgimenti dei vari fenomeni. E fu una intuizione veramente geniale quella di Einstein di aver pensato che tale correlazione, *entro i limiti della Relatività Ristretta*, dovesse estendersi in profondità fino alle più elementari nozioni di misura di spazio e di tempo, sia fra sistemi relativamente fissi, sia fra sistemi in relativa traslazione uniforme, *con il solo intervento fisico della luce*, in quest'ultima eventualità teoricamente necessario anche per supplire alla impossibilità di ricorrere, sia pur solo teoricamente, a procedimenti tattili, analoghi a quelli considerati nella consueta geometria ». E in altro scritto (85, *a*; 85) : « Einstein pose la sua prima questione relativistica in un campo *quasi* costituito solo dallo spazio e dal tempo. La riserva (espressa dal *quasi* sottolineato) dipende dal fatto che, per poter definire ed eseguire misure di lunghezze e di tempo nel campo scelto, Einstein dovette introdurvi ipotetici *regoli rigidi ed orologi* e ammettere la possibilità di trasmettervi segnali luminosi ». La relatività ristretta è puramente cinematica (Severi, 83 ; 317). Le trasformazioni di Lorentz sono puramente cinematiche (Straneo, 85, *a*; 92).

Lo spazio matematico della trasformazione di Galilei poteva applicarsi allo spazio fisico con le note limitazioni. Lo spazio matematico della trasformazione di Lorentz può avere applicazioni un po' più ampie : l'introduzione in esse della costante *c*, avente le dimensioni e il valore della velocità della luce, permette applicazioni in una classe di fenomeni fisici più vasta di quanto non consentisse la trasformazione

classica, ma non si può pretendere che tale trasformazione fornisca qualche cosa che non vi sia stato prima introdotto. Che un fluido più denso riesca a costituire sistema mobile in un'atmosfera rarefatta è un fatto del quale possiamo dare atto a Tonini, ma quello che non possiamo concedergli è che siffatto fenomeno sia previsto dalle equazioni lorentziane. Gli spazi matematici sono costruzioni astratte, suscettibili di descrivere i fenomeni naturali entro i limiti degli elementi (o delle componenti) che abbiamo in essi introdotto. Entro quei limiti la matematica è uno strumento di ricerca, un ferro del mestiere, un microscopio, come scrive Carlson. Uscire da quei limiti è fare fantascienza.

Tornando alle prove sperimentali di Caldirola, direi che egli ha ragione nell'asserire di aver verificato sperimentalmente quanto la Teoria della Relatività Ristretta prevedeva (e torna a suo merito questa sua nobile fatica); il suo errore consiste nella interpretazione stessa della Relatività, cioè nel credere, o nel dar adito a credere, che si tratti di *reali* dilatazioni temporali, di un duplicato della storiella dei gemelli. Che i mesoni in rapido moto abbiano vita più lunga è un fatto che può anche essere vero [le esperienze di Caldirola sono conferme solo qualitative della legge relativista (18; 389)], ma non perchè ciò risulti dalle equazioni relativiste: queste non sono assolutamente in grado di rivelare quelle eventuali *reali* dilatazioni temporali, per la maniera stessa con cui sono state costruite. Riferendosi alle equazioni lorentziane, Straneo avverte, ancora, categoricamente e giustamente (85, *b*; 232): « Finchè non si sia ben compresa siffatta situazione di reciprocità anticlassica (necessaria conseguenza, d'altronde, di attendibili esperienze) non si è ancora nulla compreso della concezione relativistica ».

Abbiamo esaminato la seconda legge della Dinamica, espressa in un sistema di coordinate cartesiane dalle (62), cui è possibile dare una forma matematica diversa, propria del *calcolo vettoriale*

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} \tag{75}$$

dove r sta a significare uno spostamento, distanza di un punto P dall'origine delle coordinate.

Questa legge, fondamentale, della Dinamica classica è invariante rispetto alla trasformazione G, ma non lo è rispetto a quella di Lorentz: la Dinamica relativistica dovrà fondarsi allora su una legge diversa, che, però, per piccole velocità, coinciderà con la legge classica. Ammettendo che valga anche nella meccanica relativistica il *principio della*

quantità di moto (in virtù del quale la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è eguale alla derivata della sua quantità di moto), e ammettendo altresì che la quantità di moto di un punto materiale animato da velocità **v** sia un vettore diretto come **v**, della forma $m\mathbf{v}$, dove m, invece di essere una costante, come nella meccanica classica può essere funzione del modulo v di **v**, applichiamo il principio della quantità di moto all'urto di due sfere elastiche in opportune condizioni. Tenendo conto della legge della composizione delle velocità nella cinematica relativistica, diversa da quella classica, si perviene (71, *a* ; 374) alla celebre legge di variazione della massa in funzione della velocità

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{76}$$

dove m_0 è la massa del corpo secondo la meccanica classica e chiamasi « massa di quiete ». Alla (76) era già pervenuto Lorentz, ammettendo che l'accrescimento della massa dell'elettrone, che passa dalla velocità zero alla velocità v, fosse dato da quella relazione. Einstein, come riferisce Majorana (56, *d* ; 17), considerando che nella (76) non figura il valore della carica elettrica dell'elettrone, ammise che essa potesse valere anche nel caso della materia non elettrizzata. Poichè la forza è uguale alla derivata della quantità di moto, scriviamo

$$\mathbf{F} = \frac{d\,(m\,v)}{d\,t}$$

Effettuando la derivata, per m costante si perviene alla legge classica (75); per m variabile, secondo la (76), si perviene a una legge diversa. Le componenti della forza, assumendo l'asse x come è diretta in quell'istante, per m variabile, risulteranno identiche a quelle della legge classica F_y e F_z (componenti *trasversali*), mentre la componente *longitudinale* assumerà una forma distinta da quella classica. Avremo quindi

$$\begin{aligned} F_x &= m\,\frac{d\,v_x}{d\,t} + v\,\frac{d\,m}{d\,v}\,\frac{d\,v}{d\,t} \\ F_y &= m\,\frac{d\,v_y}{d\,t} \\ F_z &= m\,\frac{d\,v_z}{d\,t} \end{aligned} \tag{77}$$

relazioni che costituiscono la legge fondamentale della meccanica relativistica.

Ragionando in modo analogo a quello della meccanica classica, il *teorema della forza viva* della meccanica relativistica si scrive (71, *a*; 380)

$$T = (m - m_o)\, c^2 \tag{78}$$

che, per piccole velocità, come facilmente si può vedere, si riduce alla nota espressione della meccanica classica

$$T = \frac{1}{2}\, m_o\, v^2 \tag{79}$$

L'espressione (78) ci dice che l'aumento di massa dovuto alla velocità v è proporzionale all'energia cinetica T posseduta dal corpo in moto, cioè

$$m - m_o = \frac{T}{c^2} \tag{80}$$

Questo suggerisce di attribuire una massa all'energia cinetica, massa misurata da T/c^2. Si può mostrare infine che, quando ad un corpo viene comunicata una energia E di qualsiasi natura, la sua massa cresce secondo la relazione

$$E = m\, c^2 \tag{81}$$

che esprime la celebre equivalenza massa-energia.

Nella sua lettera, in data 12 febbraio 1958, già citata, Straneo mi scriveva : « La questione m_o e m_v è dello stesso tipo ed ordine delle analoghe questioni delle lunghezze l_o e l_v, di t_o e t_v, ecc. e non si identifica affatto con l'equivalenza massa-energia, che, come ha dimostrato lo stesso Einstein, si può dimostrare anche su basi classiche (pressione di luce, impulso di Poyntig, ecc.). La relatività in fondo non ha suggerito che una quasi ovvia generalizzazione di un suo particolare comportamento, identicamente valido anche fuori del campo relativistico ». Nelle pagine (71, *a* ; 287) dell'eminente scienziato Enrico Persico, che abbiamo tante volte citato, può leggersi come l'esistenza della quantità di moto elettromagnetico induca ad attribuire all'energia una certa massa, il cui valore viene calcolato richiamando fra l'altro il significato energetico del vettore di Poyntig.

È interessante rilevare che già nel 1923, quando critiche non benevole alle teorie di Einstein provenivano, numerose, anche da scienziati rinomati, Enrico Fermi, appena ventiduenne, scriveva (48 ; 342) : « La grandiosa importanza concettuale della teoria della relatività, come contributo ad una più profonda comprensione dei rapporti tra spazio e tempo, e le vivaci e spesso appassionate discussioni a cui essa

ha in conseguenza dato luogo anche fuori degli ambienti strettamente scientifici, hanno forse un po' distolto l'attenzione da un altro suo risultato, che, per esser meno clamoroso, e, diciamolo pure, meno paradossale, ha tuttavia, nella fisica, conseguenze non meno degne di nota, ed il cui interesse è verosimilmente destinato a crescere nel prossimo svilupparsi della scienza. Il risultato a cui accenniamo è la scoperta che lega la massa di un corpo alla sua energia. La massa di un corpo, dice la teoria della relatività, è uguale alla sua energia totale divisa per il quadrato della velocità della luce. Già un esame superficiale ci mostra come, almeno per la fisica quale la si osserva nei laboratori, la importanza di questa relazione tra massa ed energia è tale da offuscare notevolmente quella delle altre conseguenze, quantitativamente lievissime, ma alle quali la mente si abitua con più sforzo. Valga un esempio : un corpo lungo un metro che si muovesse con la velocità, abbastanza rispettabile, di 30 km. al secondo (eguale presso a poco alla velocità del moto della Terra attraverso gli spazi) apparirebbe sempre lungo un metro ad un osservatore trascinato dal suo moto, mentre ad un osservatore fermo apparirebbe lungo un metro meno cinque milionesimi di millimetro ; come si vede, il risultato, per strano e paradossale che possa parere, è tuttavia molto piccolo, ed è da ritenere che i due osservatori non si metteranno a litigare per così poco. La relazione fra massa ed energia invece ci porta senz'altro a delle cifre grandiose. Ad esempio, se si riuscisse a mettere in libertà l'energia contenuta in un grammo di materia, si otterrebbe un'energia maggiore di quella sviluppata in tre anni di lavoro ininterrotto da un motore di mille cavalli (inutili i commenti !). Si dirà con ragione che non appare possibile che, almeno in un prossimo avvenire, si trovi il modo di mettere in libertà queste spaventose quantità di energia, cosa del resto che non si può che augurarsi, perchè l'esplosione di una così spaventosa quantità di energia avrebbe come primo effetto quello di ridurre in pezzi il fisico che avesse la disgrazia di trovare il modo di produrla ».

Genio profetico, Fermi, a 22 anni, superava di molte spanne (e i decenni che succedettero lo confermarono) molti competenti, accaniti critici delle teorie einsteiniane. Rileviamo infine l'esatta comprensione di Fermi circa la questione della *realtà* o *apparenza* degli « accorciamenti »

Soffermiamoci ancora un momento su tale questione. Il noto fisico estone G. I. Naan (61 ; 111) scrive : « Il problema più " dolente " legato alla trasformazione di Lorentz è quello della variazione della lunghezza, della durata e della massa del corpo in funzione del suo moto. Sono possibili tre punti di vista : *a*) riconoscere tutti questi effetti come

apparenti (non reali) ; *b*) riconoscere come apparenti una parte di essi ; *c*) riconoscerli reali ». Egli conclude affermando che, essendo sperimentalmente provato che la variazione della massa ha carattere reale, lo stesso deve affermarsi circa la variabilità degli intervalli spaziali e temporali.

La conclusione di Naan è errata, per le ragioni già dette. La variazione di massa data dalla (76), come afferma Straneo, esprime un fenomeno di apparenza come la (71) e la (73). Riferiamoci ancora alla (73). Sappiamo che, per il principio della Relatività Ristretta, tutti i fenomeni naturali sono retti da leggi indipendenti dallo stato di moto rettilineo uniforme, rispetto ad altri sistemi galileiani, del sistema in cui tali fenomeni accadono. Ciò significa che, se per cuocere, ad es., un uovo occorrono tre minuti in un sistema inerziale, un identico intervallo di tempo occorrerà perchè un uovo cuocia in qualsiasi altro sistema inerziale. Se, quindi, un osservatore, situato nel sistema S_o, constata nel suo orologio che la cottura dell'uovo avviene in tre minuti, un altro osservatore, situato nel sistema S_v, valuta una durata maggiore ; egli sa però che i fenomeni fisici obbediscono a leggi intrinseche e sono indipendenti dal moto del sistema inerziale in cui si svolgono : conoscendo quindi, per esperienza, la *reale* durata di tale cottura, riconosce che la sua valutazione del tempo di cottura nel sistema S_o è solo *apparente*. Invertendo la (73), trova allora, mediante la (74), la durata *reale* della cottura dell'uovo in S_o.

Non sarà inutile, infine, accennare all'ovvio relativismo di grandezze fisiche, come l'energia cinetica. Un proiettile, lanciato da un fucile, è animato da energia cinetica rispetto a oggetti o persone relativamente in quiete : per un essere supposto rigidamente connesso con il proiettile tale energia cinetica è nulla. La stessa espressione $\frac{1}{2} mv^2$, in cui figura la velocità v, ci dice che, al pari della velocità, il valore dell'energia cinetica è relativo. Non ha significato quindi parlare di energia in senso assoluto.

Non ci soffermiamo sull'opera di Minkowski, che può leggersi in numerosi trattati ; egli cercò di dare un migliore assetto alla teoria einsteiniana, dove, al posto dello spazio assoluto e del tempo assoluto, abbiamo l'assoluto spaziale-temporale, implicitamente contenuto nelle equazioni di Lorentz : « Continuum spatii et temporis est absolutum » (30, *a* ; 63). Minkowski seguì due equivalenti procedure, una prevalentemente *analitica*, l'altra prevalentemente *geometrica*. L'opera di Min-

kowski fu altamente apprezzata anche dall'Autore della Teoria della Relatività. Esaminiamo la *caratteristica, l'assoluto, l'invariante dello spazio-tempo relativistico*, ponendo in rilievo le sue sostanziali differenze dallo *spazio-tempo* già implicitamente ammesso dalla fisica classica nei suoi procedimenti e nei suoi diagrammi.

Nel cap. VIII, parte I, abbiamo visto che *la caratteristica proprietà dello spazio euclideo* è data dalla relazione pitagorica

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{82}$$

dove $x_1 = x_1'' - x_1'$, $x_2 = x_2'' - x_2'$, $x_3 = x_3'' - x_3'$
Siffatta proprietà (85, *b* ; 241) si estende come definizione di euclideità agli *iperspazi* a quattro o più dimensioni con quattro o più coordinate indipendenti x_i, ($i = 1, 2, 3, 4...$). Lo spazio-tempo dei diagrammi della fisica classica può esser costituito dallo spazio euclideo caratterizzato dall'*invariante* o *assoluto* (82) con l'aggiunta di una coordinata indipendente proporzionale al tempo, $ct = x_4$, con c = velocità della luce (nel vuoto). L'invariante di siffatto *spazio-tempo*, a quattro dimensioni, anch'esso *euclideo*, sarà dato da

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{83}$$

dove l^2 non rappresenta più il quadrato della distanza di due punti spaziali, ma, come suole dirsi, *la distanza di due eventi*.

Nello *spazio-tempo relativistico* la nuova coordinata proporzionale al tempo *non* è indipendente dalle altre coordinate spaziali, per l'invarianza del valore della velocità della luce espressa da

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{c^2} = t^2 \tag{70}$$

È questa *la condizione* che Einstein aveva intuito come necessaria, ma abbiamo visto che alla stessa condizione si giunge mediante l'applicazione della teoria dei gruppi alla relatività posta in rilievo dall'esperienza. *L'invariante* dello *spazio-tempo relativistico*, poichè, per la (70), si ha : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ con $x_4 = ct$ è dato da

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{84}$$

che differisce dall'invariante (83), implicito nei diagrammi della fisica classica, solo per il segno dell'intervallo temporale x_4^2 . I due invarianti (83) e (84) hanno significato molto diverso. L'annullarsi, ad es., della (83) significa che i due punti-eventi coincidono (cioè i due eventi accadono nello stesso luogo e nello stesso istante), mentre l'annullarsi della (84) significa che i due punti possono venir congiunti da un raggio di luce.

Diremo *universali* i punti individuati dalle quattro grandezze reali x_1, x_2, x_3, x_4 dello spazio-tempo relativistico, grandezze che possiamo concepire come le componenti di un vettore **w**, in un continuo a quattro dimensioni. Possiamo poi definire in generale un *vettore universale*, per mezzo di quattro valori che si trasformino come le coordinate di un punto universale (quindi secondo la trasformazione di Lorentz). Un punto universale, spostandosi, descrive una linea universale od oraria. Mentre la distanza spaziale (82) e la distanza classica di due eventi (83) sono sempre reali, la distanza (84) di due eventi nel *cronotopo* relativistico può essere ora reale, ora immaginaria a seconda che si abbia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \gtrless x_4^2$.

Se $s^2 > 0$ in tutti i sistemi K_i di coordinate, poichè fra questi ve ne sarà uno K_0 per il quale è $x_4 = 0$, la (84) esprimerà la distanza spaziale del punto universale dall'origine di K_0; la posizione spaziale del punto universale e del punto di origine è *contemporaneamente* individuato dalle coordinate (0, 0, 0) e (x_1, x_2, x_3). Esiste quindi un sistema di coordinate nel quale, per $s^2 > 0$, la distanza universale s diventa distanza spaziale; il vettore corrispondente dicesi *vettore spaziale*.

Se $s^2 < 0$, esisterà un K_0 nella classe K_i per cui si ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e quindi $s = \sqrt{-x_4^2} = i\,x_4$. Il valore della distanza del punto universale dal punto origine sarà dato, quindi, da $i\,x_4$, valore della grandezza x_4, riportata su un *asse temporale immaginario*. Siffatta distanza puramente temporale dicesi *distanza* o *vettore temporale*.

La (84) può anche scriversi così:

$$s^2 = x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \tag{85}$$

Ora avremo un vettore spaziale per $s^2 < 0$, cioè per $x_4^2 < (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ e un vettore temporale per $s^2 > 0$, cioè per $x_4^2 > (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Le coordinate spaziali possono essere riportate su *tre assi immaginari*, le temporali su un *asse reale*. A base della Relatività Ristretta porremo la relazione (84); a base della Relatività Generale (di cui parleremo) la relazione (85) con i tre assi spaziali immaginari. La (85) offre il vantaggio che il vettore temporale diventa reale.

La (85) esaminiamola da vicino (61; 100). Il 1º termine a 2º membro è il quadrato della distanza percorsa dalla luce nel tempo che separa i due eventi; il 2º termine è il quadrato della distanza fra i punti nei quali accadono gli eventi. Se $s^2 > 0$, s è ovviamente reale. Se $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, cioè se gli eventi accadono nello stesso punto, [tenendo presente che $x_4 = c\,(t_2 - t_1)$], $\tau = t_2 - t_1$ è il tempo (calcolato con un

orologio in quiete nel sistema di riferimento), che separa i due eventi accaduti in uno stesso punto. Si osservi che l'intervallo s fra eventi accadenti in uno stesso sistema è sempre reale, perchè la velocità del moto di un qualsiasi corpo, di un qualunque sistema, è minore della velocità della luce.

Per $s^2 < 0$, s è immaginario. Se $x_4 = c\ (t_2 - t_1) = 0$ (cioè gli eventi sono contemporanei), s esprime la distanza fra i punti in cui accadono gli eventi contemporanei.

Consideriamo due eventi accadenti in punti diversi dello spazio. Dal primo punto, nell'istante in cui si produce un evento, viene trasmesso un segnale luminoso. Se questo segnale raggiunge il secondo punto proprio nell'istante in cui in esso si produca l'altro evento, l'intervallo s fra i due eventi è nullo.

Se lo stesso segnale raggiunge il secondo punto prima che in esso si produca l'altro evento, l'intervallo s è reale. Perchè un evento sia causato da un altro evento è necessario che si propaghi un'azione. La velocità di propagazione dell'azione non può mai superare la velocità della luce: è questo che consente appunto che un evento sia causato da un altro evento. Ciò avviene appunto quando s è reale (il caso limite è $s = 0$).

Se il segnale luminoso giunge nel secondo punto dopo che si è prodotto in esso il secondo evento, s è immaginario. Eventi separati da distanze troppo grandi e da intervalli di tempo troppo piccoli non possono essere legati fra di loro da un rapporto di causalità. La causa che provoca l'annerimento di una lastra fotografica in un determinato momento non può essere quel raggio di luce che ha lasciato il Sole cinque minuti prima, poichè il raggio di luce impiega 8 minuti per percorrere la distanza Sole-Terra e l'intervallo s fra questi eventi (emissione della luce dall'atomo del Sole, avvenuta 5 minuti prima, ed oscuramento della lastra fotografica in un determinato momento) è immaginario. Naturalmente il secondo evento ha la propria causa, che però non è data dal primo evento. La distanza fra i due punti è troppo grande e il tempo che separa i due eventi è troppo piccolo perchè possa sussistere un nesso di causalità.

Abbiamo visto che il tempo è relativo al sistema di riferimento. Si definisce *tempo proprio* di un punto in moto rettilineo uniforme, di coordinate (in un dato istante) x_1, x_2, x_3, x_4, il valore di

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \tag{86}$$

Le relazioni (82) e (83) definiscono la proprietà caratteristica di spazi euclidei. In tali relazioni i termini a secondo membro sono tutti positivi. Quando non tutti i termini sono positivi si hanno gli *spazi pseudo-euclidei*, e tale è il caso della relazione (84), caratteristica dello spazio-tempo della Relatività Particolare.

Einstein (30, *d*; 261), ponendo $\sqrt{-1}\cdot ct = x_4$ (coordinata immaginaria del tempo) scrive la (84) sotto la seguente forma :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{87}$$

dove, dalle quantità finite della (84), si passa a quantità infinitesime (differenziali). « Poichè questa formula, egli scrive, eguagliata a zero, esprime un comportamento reale, noi possiamo attribuire alla quantità *ds* un significato reale anche nel caso in cui i punti vicini del *continuo* a quattro dimensioni siano scelti in modo tale che il *ds* corrispondente non si annulli. Possiamo esprimere ciò nel seguente modo : lo spazio a quattro dimensioni (con una coordinata immaginaria del tempo) della teoria speciale della relatività possiede una metrica euclidea. Ed ecco come si spiega che una tale metrica sia detta euclidea. L'introduzione di questa metrica in un continuo a tre dimensioni equivale in tutto e per tutto a porre gli assiomi della geometria euclidea. In questo caso l'equazione di definizione della metrica non è altro che l'applicazione del teorema di Pitagora ai differenziali delle coordinate. Nella teoria speciale della relatività è permesso sottoporre le coordinate (a mezzo d'una trasformazione) a modificazioni tali da consentire che il valore ds^2 (invariante fondamentale), anche nel nuovo sistema di coordinate, eguagli la somma dei quadrati dei differenziali delle coordinate. Tali trasformazioni si chiamano " trasformazioni di Lorentz ". Il metodo euristico impiegato dalla teoria speciale della relatività è caratterizzato dalla posizione seguente : per esprimere delle leggi naturali è ammesso l'uso di quelle sole equazioni la cui forma non varia modificando le coordinate per mezzo d'una trasformazione di Lorentz (covarianza delle equazioni rispetto alle trasformazioni di Lorentz). Questo metodo conduce alla scoperta dell'inevitabile legame tra momento ed energia, tra campi di forze elettriche e magnetiche, tra forze elettrostatiche ed elettromagnetiche, tra massa inerte ed energia. Ne deriva che il numero dei concetti indipendenti e delle equazioni fondamentali della fisica viene ad essere ridotto. Questo metodo ha superato i suoi stessi limiti : si può sostenere che le equazioni che esprimono le leggi naturali siano covarianti solo in rapporto alle trasformazioni di Lorentz? Così formulata la domanda non ha alcun senso, giacchè tutti i sistemi di equa-

zioni possono essere espressi con coordinate generali. La domanda va posta così: le leggi naturali sono costituite in modo tale da non essere materialmente semplificate attraverso la scelta di un qualsiasi particolare gruppo di coordinate? Diremo che il nostro assioma, fondato sulla esperienza, dell'identità delle masse inerti e gravitazionali facilita una risposta positiva a questa domanda. Elevando a principio l'equivalenza di tutti i sistemi di coordinate riguardo alle formulazioni delle leggi di natura si perviene alla teoria generale della relatività, a patto di conservare la legge della costanza della velocità della luce o, in altre parole, l'ipotesi del valore obiettivo della metrica euclidea, almeno per le porzioni infinitamente piccole dello spazio a quattro dimensioni ».

Incidentalmente dirò che non sono del tutto d'accordo sulla dizione « quattro dimensioni » che potrebbe indurre ad errori di concetto.

La splendida sintesi or ora trascritta delle teorie relativiste, fatta da Einstein, mostra, fra l'altro, che la Teoria della Relatività Ristretta è un caso particolare della Generale, che tratteremo nel prossimo capitolo. Resta chiaro intanto che la Relatività Particolare (o, ciò che è lo stesso, le equazioni di Lorentz) si riferiscono ad uno spazio astratto di natura euclidea o pseudoeuclidea, cui non possono riferirsi i fenomeni considerati da Tonini ed altri, i quali insistono sulla « realtà » degli accorciamenti delle lunghezze e delle dilatazioni dei tempi.

Il valore pratico della Relatività Ristretta è immenso. Caldirola scrive (18 ; 384) : « ... l'importanza pratica della Relatività Ristretta è andata ai nostri giorni rapidamente aumentando, come si comprende immediatamente se si considera che le moderne gigantesche macchine, che si usano nei laboratori di fisica nucleare allo scopo di produrre particelle ad energia elevata (sincrotroni, betatroni, ecc.) devono essere progettate, affinchè abbiano a funzionare, basandosi sulle leggi della teoria einsteiniana della Relatività Ristretta ». E più oltre (18 ; 443) : « ... le moderne grandi macchine (betatroni, sincrotroni, ciclotroni, acceleratori lineari di risonanza, ecc.), che vengono impiegate nei laboratori di ricerca allo scopo di accelerare ioni ed elettroni fino ad imprimere loro velocità corrispondenti a tensioni acceleratrici di diverse decine di GeV, costituiscono la più sensazionale ed evidente conferma della correttezza della Teoria della Relatività einsteiniana. Ed infatti nella progettazione di tali macchine la considerazione delle leggi relativistiche della meccanica e dell'elettromagnetismo è richiesta non allo scopo di apportare correzioni più o meno sensibili ai risultati, che si deducono partendo dalla meccanica newtoniana e dell'elettromagnetismo maxwelliano, ma addirittura come " modus operandi " : *in altri*

termini le grandi macchine acceleratrici funzionano solo se progettate secondo le leggi della relatività ».

Ho inteso, in questo capitolo, fissare i limiti e la portata della Relatività Ristretta (e su ciò parleremo ancora nell'ultimo capitolo di questa Parte II) : non vi è spazio assoluto nè tempo assoluto, ma spazio-tempo o cronotopo assoluto.

L'aver trascurato la relatività del tempo e l'aver applicato, al tempo stesso, le equazioni di Lorentz, ha condotto a qualche paradossale interpretazione, priva di fondamento scientifico.

Lo spazio-tempo è uno spazio astratto di natura fondamentalmente euclidea. È ancora uno spazio non dissimile da quello su cui è costruita tutta l'Astronomia classica ; come lo spazio classico, esso è fondato sulle ipotesi dei corpi rigidi, dell'omogeneità e della isotropia spaziale, della indipendenza delle forze ; la differenza consiste solo in questo : in luogo di trasmissioni istantanee si hanno trasmissioni temporali uniformi connesse con il fatto che la velocità della luce non è infinita.

La portata pratica è immensa : la fisica nucleare ha dato, e darà ancora, risultati che lasciano stupiti scienziati e profani.

La Relatività Ristretta non rappresenta tanto una nuova tappa nell'evoluzione subita dal concetto di spazio quanto una premessa indispensabile per la comprensione del concetto di spazio, veramente rivoluzionario, cui conduce la Relatività Generale, che tratteremo nel prossimo capitolo, e di cui la Relatività Ristretta è, come si è detto, un caso particolare.

CAPITOLO III.

La Relatività Generale.

Principio di Relatività Generale – Massa inerte = massa pesante – L'esempio dell'ascensore – Gravitazione = accelerazione – *L'Universo reale non è euclideo* – La Relatività Ristretta caso particolare della Relatività Generale – L'elemento lineare – Sistema locale, generale e affine – Coordinate gaussiane – Geometria intrinseca – Spazio a n dimensioni di Riemann – Spazio euclideo (piano) e spazi non euclidei (curvi) – I coefficienti g_{ik} dell'elemento lineare – Cenni di analisi tensoriale – Tensori, componenti covarianti e controvarianti – I simboli di Christoffel – Condizioni per l'invarianza delle leggi naturali rispetto a sistemi di coordinate arbitrarie – Linea oraria o d'universo (geodetica) – Legge di inerzia generalizzata – Equazione di Poisson-Laplace – Potenziali gravitazionali – Significato di curvatura del cronotopo – Fenomeno fisico e modello geometrico – « Solidarietà » fra spazio e fenomeni fisici – Equazioni gravitazionali – Determinazione di Schwarzschild di ds^2 (caso statico) – Azione a contatto delle forze gravitazionali – Spostamento del perielio di Mercurio – Deflessione dei raggi luminosi – Spostamento delle righe spettrali verso il rosso (effetto Einstein) – Abbandono del postulato della costanza della velocità della luce – Il campo gravitazionale e il rallentamento del ritmo del pendolo – Critica del concetto tradizionale del tempo — Universo finito e illimitato – Repulsione cosmica – Universo in espansione.

La Relatività Generale o della seconda maniera è una estensione o generalizzazione della Relatività Particolare. Ecco qui di seguito, messi a confronto, i due principî che stanno alla base della prima e della seconda Relatività :

Principio di Relatività Particolare : Se K e K' sono due sistemi di coordinate, l'uno mosso, rispetto all'altro, con moto rettilineo uniforme, lo svolgimento dei fatti naturali (meccanici ed elettrici) è regolato dalle stesse leggi generali tanto se riferito a K, quanto se riferito a K'.

Principio di Relatività Generale. Se K e K' sono due sistemi di coordinate, l'uno mosso *comunque* rispetto all'altro, lo svolgimento dei fatti naturali (meccanici ed elettrici) è regolato dalle stesse leggi generali, tanto se riferiti a K quanto se riferiti a K'.

Diamo, innanzitutto, con Castelfranchi, (20 ; 100 e segg.) uno sguardo generale alla teoria, per scendere poi a qualche particolare.

La Relatività Ristretta non considera che sistemi inerziali, affermando che in ognuno di essi la luce si propaga con la stessa velocità in tutte le direzioni (propagazione *isotropa*), che questa velocità è una costante, che le equazioni di Maxwell sono rigorose, che le formule di trasformazione sono quelle di Lorentz, che le leggi dei fenomeni fisici restano le stesse per tutti questi sistemi. Uno spazio-tempo, che in tutta la sua estensione gode della proprietà di contenere un'infinità di sistemi di Galileo, è un Universo di Minkowski. Esso, afferma esplicitamente Castelfranchi, viene chiamato *euclideo* a causa dell'analogia tra la linea d'universo che corrisponde al movimento rettilineo uniforme e la linea retta nello spazio della geometria euclidea. Lo spazio-tempo, come lo spazio della geometria euclidea, è *omogeneo*, ossia ha le stesse proprietà di tutti i punti. Dopo il 1905 Einstein si domandò : l'Universo reale è euclideo ? L'esistenza della Gravitazione, ignorata nella Relatività Ristretta, non viene a distruggere l'omogeneità dell'Universo di Minkowski ? È la geometria euclidea quella che meglio si adatta al mondo fisico ? A queste domande Einstein rispose negativamente: egli comprese che la relatività, nella sua primitiva forma, non rappresentava che una prima tappa e che bisognava andare oltre per includere la gravitazione nella teoria e trovare, per ogni legge fisica, una forma *indipendente dal movimento anche accelerato del sistema di riferimento*. Nel 1915 Einstein giunse alla soluzione di questo difficile problema. Il punto di partenza è il *principio di equivalenza : campo di gravità = accelerazione*. Una proprietà molto notevole distingue la gravitazione da tutte le altre forze : essa agisce nello stesso modo su tutti i corpi che sono ugualmente situati. Corpi aventi la stessa posizione, pur differendo per la massa, la forma, la costituzione, subiscono, per effetto di un campo gravitazionale (ad es. per l'attrazione di uno o più astri) uguali accelerazioni ; se quei corpi si trovano a contatto, anche per un tempo brevissimo, essi restano uniti nella traiettoria che descrivono sotto l'azione del campo. Galileo aveva rilevato questo fatto nel caso della gravità terrestre, affermando che, nel vuoto, corpi pesanti e leggeri cadono con la stessa velocità ; Newton ha poi esteso tale proprietà ad ogni campo gravitazionale. Si ha

forza = massa inerte × accelerazione

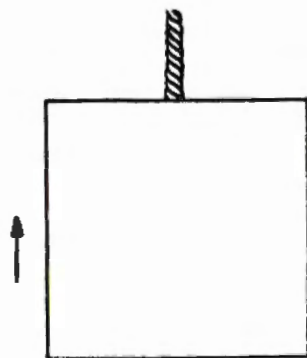
dove la massa è una costante propria del corpo accelerato. D'altra parte :

forza (peso) = massa pesante × intensità del campo,

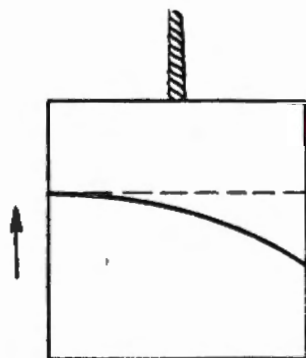
quindi la massa pesante è pure una caratteristica del corpo. Uguagliando i secondi membri e dividendo per *massa inerte,* avremo

$$\text{accelerazione} = \frac{\text{massa pesante}}{\text{massa inerte}} \times \text{intensità del campo}$$

Poichè, come abbiamo detto, l'esperienza insegna che in uno stesso campo di gravitazione l'accelerazione è unica per tutti gli oggetti, il rapporto fra le due masse è una costante; scegliendo le unità in modo che questo rapporto sia *uno, la massa pesante è uguale a quella inerte.* Eötvös ed altri provarono sperimentalmente siffatta identità (V. cap. I di questa parte). Ed ecco il celebre esempio immaginato da Einstein per le sue deduzioni legate all'eguaglianza fra massa pesante e massa inerte. Immaginiamo una porzione di spazio vuoto, così lontano dalle stelle e da ogni materia da considerare nullo il valore del campo gravitazionale, cosicchè ci si trovi nel caso ideale ove la legge d'inerzia è applicabile. È allora possibile scegliere in siffatta posizione di spazio un sistema galileiano. Supponiamo situato in questo spazio un ascensore isolato, nell'interno del quale si trovi un osservatore; per lui non v'è nè *peso* nè una direzione privilegiata.

Supponiamo ancora che, per mezzo di una fune attaccata a un gancio fissato al tetto dell'ascensore, un essere esterno si metta a tirare con una forza costante. Per un osservatore esterno, immobile nel sistema galileiano, l'ascensore assume un movimento uniformemente accelerato. Ma tutt'altra potrà essere l'opinione dell'uomo, chiuso nell'ascensore; egli sarà proiettato sul pavimento; per lui v'è, ora, un *alto* e un *basso,* come in una stanza sulla Terra, e pertanto constaterà che tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione, e la prima sua impressione sarà di trovarsi in un campo di gravitazione. Egli si dirà: la mia camera *è sospesa, in riposo,* in un campo di gravitazione. Non possiamo negargli il diritto di considerare l'ascensore come immobile, mentre in realtà è accelerato relativamente allo spazio galileiano; la possibilità di tale interpretazione poggia sull'anzidetta proprietà di un campo di gravitazione di conferire a tutti i corpi la stessa accelerazione, circostanza associata, come abbiam visto, all'eguaglianza della massa inerte e della massa pesante.

Invece di supporre l'ascensore lontano da ogni materia, supponiamolo in *caduta libera* (e senza rotazione) nel campo di gravitazione di un astro. Il peso vi sarà allora soppresso perchè tutti gli oggetti sono sottomessi alla *stessa* accelerazione cui è sottoposto l'ascensore e cadono con esso. Un sistema di riferimento rigidamente connesso con l'ascensore cadente è quindi un sistema inerziale. È naturale ammettere che nell'interno la luce si propaghi in linea retta, essendo l'universo, nel quale si trova, un universo euclideo. Nel caso di un corpo cadente sulla superficie terrestre, l'impiego di un sistema di riferimento solidale con esso, e quindi in moto uniformemente vario rispetto alla Terra, permette di sopprimere il campo di gravitazione. Siffatto risultato non è però ottenuto che localmente, perchè il campo di gravitazione terrestre non è uniforme ; si può dire, come scrive acutamente Castelfranchi, che esiste un Universo euclideo *tangente* in ogni punto e in ogni luogo all'Universo reale, ed è quello costituito da una piccola estensione attorno ad osservatori in caduta libera, che riferiscono gli avvenimenti ad assi legati al sistema, dove gli osservatori stessi si trovano. Così, da una parte l'impiego di un sistema di riferimento in movimento accelerato, in un Universo euclideo, equivale a creare un certo campo di gravitazione, nel quale questo sistema può considerarsi come immobile ; d'altra parte l'impiego di un sistema di riferimento legato a un corpo in caduta libera, in un campo di gravitazione, ha per effetto quello di sopprimere questo campo. Un osservatore, mediante esperienze intrinseche, non può, quindi, decidere se si trova immerso in un campo di gravità oppure è soggetto ad una accelerazione, non ha cioè motivo per scegliere tra le due ipotesi seguenti : 1) il sistema è in movimento accelerato in uno spazio privo di campo di gravitazione ; 2) il sistema è in riposo, immerso in un campo gravitazionale. V'è quindi equivalenza, concluse Einstein, fra un campo di gravitazione uniforme e una accelerazione del sistema di riferimento. Per un osservatore in caduta libera nell'interno dell'ascensore, abbiamo visto che il campo di gravitazione non è soppresso che localmente, in una regione poco estesa dell'intorno ; infatti *l'intensità del campo non è costante nè in grandezza nè in direzione* : in natura nessun campo di gravitazione è uniforme.

Considerando, oltre ai tre assi inerziali x, y, z del sistema rigidamente connesso con l'ascensore, un quarto asse t, sul quale si possa rappresentare il tempo segnato da un orologio interno all'ascensore, la regione limitata del campo gravitazionale (ad es. l'interno dell'ascensore), durante un breve intervallo di tempo, si potrà rappresentare mediante un frammento di cronotopo pseudoeuclideo di Minkowski. Al

variare del luogo e dell'istante varierà questo frammento. I vari frammenti, collegati fra loro, costituiranno una specie di mosaico poliedrico, che può dare un'idea del cronotopo *curvo* rappresentante il campo gravitazionale. Da ciò segue che *l'Universo reale non è euclideo*. Il principio di equivalenza segna un ponte tra la teoria della relatività e quella della gravitazione ; per trovare, ad es., le leggi dei fenomeni in un campo di gravitazione omogeneo non v'è che calcolare come questi fenomeni si manifestino in un sistema di riferimento uniformemente accelerato. Nel caso del nostro ascensore, supposto in moto accelerato verso l'alto, in un mezzo agravitazionale, un raggio luminoso, per es., penetra orizzontalmente attraverso una apertura, muovendosi orizzontalmente, in linea retta, con velocità costante, verso la parete opposta : durante il tempo assai breve che la luce impiega ad attraversare la cabina, questa si è spostata, e il raggio quindi colpirà un punto che non è esattamente opposto al punto d'entrata, bensì un poco al disotto : più precisamente, dato che il moto è accelerato, l'angolo d'inflessione cambia ad ogni punto della traiettoria, e questa diventa curva. In un sistema accelerato i raggi luminosi descrivono quindi traiettorie curve; ma, poichè un sistema accelerato è equivalente ad uno in riposo immerso in un campo di gravitazione, ne consegue che i raggi luminosi subiscono un incurvamento in un campo di gravitazione.

Si può estendere il principio di equivalenza e supporre il sistema di riferimento in moto qualunque, a condizione d'introdurre un campo di gravitazione non uniforme e convenientemente distribuito : basta in ogni punto ammettere un campo di gravitazione uguale all'accelerazione del sistema di riferimento, rispetto a degli assi in caduta libera e senza rotazione. Così, per es., per un sistema di riferimento in rotazione, tutto avviene come se esso fosse in traslazione e comportasse un campo di gravitazione, e precisamente un campo di forza centrifuga ; Einstein ha, quindi, eretto in Principio la affermazione seguente :

Tutti i sistemi di riferimento sono equivalenti per formulare le leggi della Natura ; queste possono venire espresse sotto una forma che non cambia, qualunque sia il sistema di riferimento.

E invero tutte le leggi fisiche sono basate sulla constatazione di coincidenze di due o più eventi in uno stesso punto dello spazio e in un

medesimo istante ovvero in un punto dell'Universo spazio temporale; nel linguaggio della relatività esse sono intersezioni delle linee d'Universo, e quindi indipendenti da ogni sistema di coordinate. Ed è dunque certo che le leggi della natura potranno esprimersi in una *forma intrinseca,* che resta la medesima al variare del sistema di riferimento. Per meglio chiarire questo punto essenziale della teoria della Relatività Generale, giustifichiamo meglio, con Kopff, l'uso fatto or ora dei concetti e del linguaggio della Relatività Particolare. Un moto non uniforme, in piccolissimi intervalli di spazio-tempo, può considerarsi come rettilineo uniforme e perciò ad esso possono applicarsi i risultati della Teoria della Relatività Particolare. Nello *infinitamente piccolo* il campo di gravitazione può considerarsi omogeneo ; in esso si può scegliere sempre un sistema di coordinate K tale che il campo di gravitazione scompaia, un sistema, cioè, la cui accelerazione coincida in grandezza e direzione con quella della gravità : il moto avviene, allora, come se il sistema fosse in quiete e come se non esistesse il campo gravitazionale. In un tal sistema, quindi, devono essere validi i risultati della Relatività Ristretta : sistemi di tal genere possono scegliersi solo per zone infinitamente piccole, poichè soltanto in queste il campo gravitazionale può considerarsi omogeneo. Un sistema inscritto nell'intorno infinitesimo di un punto universale, in cui l'estensione infinitesima del continuo spazio-tempo è definita in maniera che il moto possa considerarvisi come uniformemente accelerato (il campo di gravitazione come omogeneo) dicesi *sistema topico o locale :* in esso il continuo spazio-tempo può considerarsi come pseudo-euclideo. La Relatività Ristretta è, pertanto, un caso particolare della Relatività Generale, la quale, per l'appunto, non è che una estensione o generalizzazione della prima.

Consideriamo l'intorno infinitesimo di un punto dello spazio-tempo P e individuiamo un punto vicinissimo P', per mezzo di quattro coordinate dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, riferite le prime tre ad assi spaziali immaginari, la quarta ad un asse temporale reale. Il relativo elemento lineare si scriverà :

$$ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{88}$$

cui può giungersi differenziando la (85), *invariante dello spazio-tempo,* posto (e vedremo subito il perchè) a base della Relatività Generale. Come abbiam detto nel capitolo precedente, la (85), rispetto alla forma (84), offre il vantaggio che il vettore temporale è reale. Dalla (88) risulta infatti che ds^2 è positivo per un vettore temporale, negativo per un vettore spaziale ; nel primo caso, P' può spostarsi in P per movi-

mento. Nella (88), l'elemento lineare si riferisce sempre a un sistema *locale* non accelerato, cioè agravitazionale. Le coordinate di P' rispetto a P vengono misurate in *ogni* sistema locale (cioè rispetto ad un osservatore trovantesi in P stesso) con un regolo metrico infinitamente piccolo e costante ; le coordinate temporali vengono misurate con un orologio che mantiene lo stesso ritmo in ogni sistema locale. ds^2, per la invarianza dell'elemento lineare, voluta dalla Teoria della Relatività Particolare, è invariante rispetto ad ogni *sistema di coordinate locale*. Altrettanto dicasi della *velocità della luce :* essa ha lo stesso immutabile valore universale c (48 ; 181/2).

Chiamiamo *sistema generale di coordinate* un sistema considerato in ogni punto come mosso arbitrariamente o corrispondente ad un campo di gravitazione non omogeneo. Cerchiamo il legame fra i differenziali del sistema locale e quelli del sistema generale. Premettiamo : per il passaggio da un sistema inerziale K ad un altro K', le relazioni che legano le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 di K con le coordinate x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 di K', dovendo valere il principio di relatività (in particolare, per la legge d'inerzia) debbono essere *lineari*. Tali relazioni debbono, inoltre, essere *omogenee*, in quanto si è convenuto che nell'istante iniziale le due origini O e O' coincidano e quindi che, per $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sia $x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_4 = 0$. Pertanto tali relazioni debbono essere del tipo :

$$(89) \qquad \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 \\ x'_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4 \\ x'_3 &= a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 \\ x'_4 &= a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4 \end{aligned}$$

Dalle (89), imponendo le condizioni di cui abbiamo parlato nel capitolo precedente, si perviene agevolmente alla trasformazione di Lorentz (69).

Per riferire le nostre leggi e le nostre considerazioni sceglieremo sistemi le cui coordinate possano trasformarsi analiticamente per mezzo di *trasformazioni lineari ed omogenee*, i cui coefficienti non siano legati, in generale, ad alcuna condizione, e, in ogni modo, *mai da condizioni di ortogonalità* [i coefficienti delle (89) sono legate, per il Principio di Relatività, da certe condizioni (48 ; 45), che differiscono dalle note *condizioni di ortogonalità* della Geometria Analitica, per il segno negativo di x_4^2 nell'invariante (84), implicito nelle (69)]. *Gli assi di tali sistemi sono ancora rettilinei*, ma si intersecano formando angoli arbitrari,

cioè non necessariamente retti, e non hanno una unità di misura comune: ciascun asse ha la propria unità, stabilita dalle equazioni di trasformazione. Chiameremo *affini* tali sistemi e *affini* chiameremo le relative trasformazioni.

Ciascun sistema generale, nell'intorno infinitamente piccolo di P, è un *sistema affine*. I differenziali del sistema locale e quelli del sistema generale sono legati dalle seguenti equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \alpha_{11}\,dx_1 + \alpha_{12}\,dx_2 + \alpha_{13}\,dx_3 + \alpha_{14}\,dx_4 \\ dx'_2 &= \alpha_{21}\,dx_1 + \alpha_{22}\,dx_2 + \alpha_{23}\,dx_3 + \alpha_{24}\,dx_4 \\ dx'_3 &= \alpha_{31}\,dx_1 + \alpha_{32}\,dx_2 + \alpha_{33}\,dx_3 + \alpha_{34}\,dx_4 \\ dx'_4 &= \alpha_{41}\,dx_1 + \alpha_{42}\,dx_2 + \alpha_{43}\,dx_3 + \alpha_{44}\,dx_4 \end{aligned} \tag{90}$$

che, in maniera compatta, si scrivono

$$dx'_i = \alpha_{ik}\,dx_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix} \tag{91}$$

dove α_{ik} sono coefficienti arbitrari dipendenti dalla specie del sistema di coordinate, diverse da punto a punto. L'elemento lineare (88), nel sistema generale, si trasforma quindi nella relazione

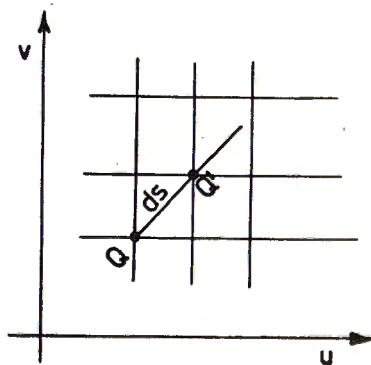
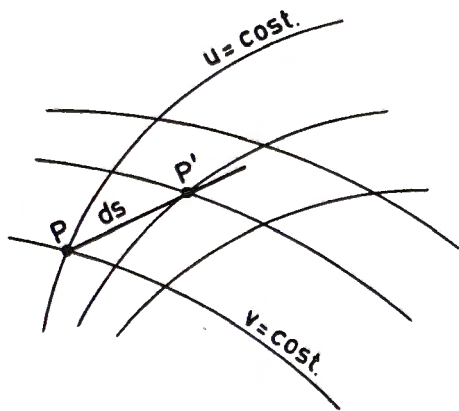
$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\,dx_i\;dx_k \text{ o, anche, } ds^2 = g_{ik}\,dx_i\;dx_k \quad (g_{ik} = g_{ki}) \tag{92}$$

in cui la somma si deve affettuare rispetto ad i e k da 1 fino a 4; il valore ds^2 corrisponde, perciò, a quello determinato nel sistema locale. Mantenendo l'elemento lineare ds possiamo passare da un sistema generale K ad un altro qualsiasi K', per mezzo di una trasformazione spazio-tempo (91). Gli eventi di un intorno infinitesimo di un punto di qualsiasi sistema locale si verificano come se detto intorno fosse agravitazionale (non accelerato); e poichè ds^2 ha lo stesso valore per tutti i sistemi locali, lo è anche per tutti i sistemi generali. Quindi, per la ipotesi della validità della Teoria della Relatività Particolare in tutti i sistemi locali, possiamo asserire: *l'elemento lineare ds è invariante comunque si scelga il sistema generale di riferimento; il suo valore permane immutato, qualunque sia lo speciale sistema di coordinate prescelto* e può essere calcolato in ogni sistema locale a mezzo di misure spazio-temporali.

Siamo giunti così ad una importante analogia con la Geometria di Riemann, che brevemente tratteremo. Avevamo affermato che le leggi naturali generali debbono essere espresse in una forma invariante rispetto a sistemi comunque mossi e a sistemi nei quali esistono campi di gravitazione arbitrari; ora aggiungiamo che l'elemento infinitesimo lineare « tetradimensionale » è invariante rispetto a tutti i sistemi in questione. Lo stesso dicasi per la Geometria di Riemann, rispetto ad ogni possibile geometria non euclidea.

Una superficie, scrive Fano (34 ; 93), nello spazio ordinario, si può rappresentare analiticamente, esprimendo le coordinate cartesiane *ortogonali* x, y, z di un suo punto variabile come funzioni di due parametri indipendenti u e v [sono indipendenti se non sono identicamente nulli tutti e tre i determinanti di 2º ordine della matrice Jacobiana delle $f_i\ (u, v)$] :

$$(93) \qquad x = f_1\ (u, v) \quad , \quad y = f_2\ (u, v) \quad , \quad z = f_3\ (u, v)$$

funzioni definite in un certo campo di variabilità delle u, v e per valori generici di queste, finite, continue e derivabili finchè occorre. Vi è allora corrispondenza biunivoca senza eccezione fra i punti della superficie, limitatamente a una certa regione, e un conveniente campo di variabilità delle u, v; le u, v si chiamano *coordinate gaussiane o curvilinee* sulla superficie e *linee coordinate* le linee u = cost., v = cost.

Le (93) forniscono quindi (entro una regione conveniente) una *rappresentazione piana* o *carta geografica* della superficie, facendo corrispondere ad un punto P della superficie di parametri u, v un punto Q in cui u, v si assumono come coordinate cartesiane ortogonali.

Valutiamo *sulla superficie* la distanza o elemento lineare o d'arco ds dei punti $P\ (u, v)$ e $P'\ (u + du, v + dv)$. Per avere dx, dy, dz scriviamo i differenziali totali

$$\text{(94)} \qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv \end{aligned}$$

Quadrando le (94) e sommando, si ha

$$\text{(95)} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

con $\quad E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \ , \quad F = x_u\, x_v + y_u\, y_v + z_u\, z_v \ ,$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

La (95), poichè il quadrato della matrice Jacobiana delle x, y, z è

$$\text{(96)} \qquad E\, G - F^2 = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|^2 > 0 \,,$$

è definita *positiva* per valori reali non tutti e due nulli di du e dv. Note le funzioni E, F G, è possibile calcolare, con una integrazione, la lunghezza di un arco di linea tracciato sulla superficie.

Il ds^2 è dunque espresso da una forma differenziale quadratica nelle u, v, i cui coefficienti dipendono dalle sole (derivate prime delle) funzioni $x\ (u, v)$, $y\ (u, v)$, $z\ (u, v)$. Si può facilmente verificare che $F = 0$ è la condizione perchè le linee coordinate u = cost., v = cost., passanti per il punto (u, v), siano ortogonali. L'area di una figura qualunque sulla superficie si può ricavare decomponendo la figura in quadrangoli (maglie) elementari. Gauss così ragionava: Se noi materializziamo la superficie, considerandola come un velo sottilissimo, che si possa deformare a piacere per semplice flessione, senza lacerazioni nè estensioni, le figure tracciate sulla superficie assumeranno, in conseguenza delle dette deformazioni, configurazioni spaziali diverse, ma la lunghezza di ogni arco di linea, l'angolo sotto cui due linee s'incontrano, l'area di una figura sulla superficie rimarranno invariati; e così più generalmente per tutte le proprietà, che dipendono geometricamente dai soli elementi suddetti, e analiticamente dalle sole funzioni E, F, G, cioè dall'espressione dell'elemento lineare ds^2. Così, per es., deformando

una superficie nel modo indicato, le sue *linee geodetiche* rimarranno tali; in particolare, distendendo una regione di cono o cilindro sopra un piano euclideo, le geodetiche del cono o cilindro si sovrapporranno alle rette, geodetiche del piano. Le proprietà geometriche di una superficie, che sono indipendenti dalle deformazioni di questa, nelle quali non intervengono elementi estranei a questi, che si possono studiare senza uscire dalla superficie (come la geometria piana senza uscire dal piano), costituiscono la *geometria intrinseca* della superficie: in questo senso la *geometria intrinseca* del cilindro e del cono coincide appunto, limitatamente a regioni opportune, con la geometria del piano euclideo. Due superficie sulle quali il ds^2, rispetto a parametri u, v opportuni, si esprime con la stessa formula, si possono, limitatamente a regioni convenienti, *applicare* l'una sull'altra (cioè sovrapporre materialmente, solo deformandole), in quanto vi risultano uguali tutte le lunghezze corrispondenti, gli angoli, le aree; esse si dicono *applicabili* o *isometriche*, cioè hanno la *stessa geometria intrinseca*. Introducendo, in luogo dei parametri u, v, altri due u', v', funzioni univoche, continue e univocamente invertibili dei primi, l'espressione del ds^2, nelle nuove variabili, sarà dello stesso tipo della precedente, ma con funzioni E, F, G, in generale diverse; perciò la superficie e la sua geometria intrinseca sono legate non tanto alla singola forma differenziale quadratica $E\,du^2 + \ldots$, quanto *all'intera classe delle forme differenziali equivalenti a questa*. Gauss ha messo in evidenza che elemento importantissimo della geometria intrinseca di una superficie è la *curvatura totale* K (o brevemente *curvatura*) di essa nei singoli punti. Uno dei modi in cui detta curvatura può definirsi è questo: le ∞^1 sezioni normali di una superficie F in un suo punto P hanno in P stesso un raggio di curvatura generalmente variabile; e questo raggio, considerato in valore e segno rispetto al verso positivo (comunque fissato) della normale, assume valori stazionari R_1, R_2 per due sezioni normali, determinati da piani perpendicolari fra di loro (sezioni normali principali, raggi principali di curvatura); si ha allora $K = \dfrac{1}{R_1 R_2}$. Se le sezioni normali in P hanno raggio di curvatura costante R, si ha $K = \dfrac{1}{R^2}$; ciò avviene per tutti i punti di una sfera di raggio R. Altro modo di definire la curvatura è il seguente: per un triangolo geodetico sopra una superficie arbitraria, la somma degli angoli interni è in generale diversa da π; e la differenza $A + B + C - \pi$, positiva o negativa, si chiama *eccesso geodetico* del triangolo. La curvatura totale di una superficie nel punto P è il limite del rapporto

dell'eccesso geodetico all'area (presa in valore assoluto) in ogni triangolo geodetico, che tenda a concentrarsi nel punto P. Gauss ha dimostrato che la curvatura totale di una superficie in un punto può esprimersi per mezzo delle sole funzioni E, F, G e le loro derivate, ed è perciò invariante rispetto a deformazioni arbitrarie della superficie. Dalla espressione (48 ; 194) della curvatura K, determinata *in un punto* in funzione dei soli coefficienti dell'elemento lineare *in quel punto* e delle loro derivate prime e seconde, si trae che condizione necessaria e sufficiente, affinchè una superficie abbia *curvatura nulla* (sia cioè un piano euclideo o sviluppabile su un tale piano), è che detti coefficienti siano costanti in ogni punto della superficie stessa. La geometria sulle superficie a curvatura costante negativa coincide (limitatamente a regioni opportune) con la geometria piana non euclidea di Lobacevskij-Bolyai.

Nella geometria differenziale delle superficie secondo l'indirizzo di Gauss una (regione di) superficie si considera semplicemente come una molteplicità ∞^2, in corrispondenza biunivoca continua con le coppie di numeri (u, v) di un certo campo : si può dire anzi che si considera come superficie questa stessa ∞^2 di « coppie di numeri », entro la quale la formula dell'elemento lineare $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ definisce la distanza ds di due punti infinitamente vicini, e la lunghezza di un arco finito si deduce dalla precedente per integrazione. Aree ed angoli si determinano pure mediante certe formule in cui entrano E, F, G e loro derivate. Variando l'espressione dell'elemento lineare, varia la *determinazione metrica* o brevemente la *metrica* della superficie. Questo può farsi anche partendo da gruppi di tre, o, più generalmente, di n numeri ; e si avranno così spazi a tre o ad n dimensioni, suscettibili essi pure di infinite diverse metriche. B. Riemann si riferisce senz'altro a uno *spazio o varietà a n dimensioni*, ossia a un insieme di elementi, o punti, in corrispondenza biunivoca continua con i gruppi di n numeri $x_1, x_2, \ldots x_n$, variabili in un certo campo. In questa varietà V_n egli postula come data una metrica mediante una forma differenziale quadratica

$$(97) \qquad ds^2 = \sum a_{ik}(x)\,dx_i\,dx_k \text{ o, anche, } ds^2 = a_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

dove le $a_{ik} = a_{ki}$ sono funzioni assegnate delle x_i, univoche, continue e derivabili finchè occorre ; e considera questo ds, o *distanza* dei punti infinitamente vicini (x) e $(x + dx)$ come invariante rispetto a tutti i cambiamenti di coordinate risultanti dal sostituire le x_i con altre n variabili x'_i, funzioni univoche delle prime, derivabili finchè occorre, e univocamente invertibili (quindi con determinante Jacobiano non nullo). La forma quadratica che esprime il ds^2 viene assunta come determinante

$A = | a_{ik} |$ identicamente nullo, e inoltre *definita positiva*, tale cioè da risultare sempre positiva, in particolare non mai nulla, per valori reali delle dx_i non tutti nulli. Ciò ad evitare che punti reali distinti possano avere distanza nulla o immaginaria; questo richiede soltanto che le funzioni a_{ik} soddisfino, nel campo considerato, a certe disuguaglianze (per $n = 2$, $E > 0$, $EG - F^2 > 0$). A una varietà V_n a n dimensioni così fatta, spesso, anche prescindendo dalla condizione che il ds^2 sia forma definita positiva, si dà il nome di *spazio di Riemann*. E *geometria riemanniana* è la geometria intrinseca di questo spazio (o varietà V_n) e delle figure in esso contenute, che si conservano nelle anzidette trasformazioni di variabili $x'_i = x'_i\,(x)$. Riemann parla della possibilità di *infinite geometrie*, in corrispondenza all'arbitrarietà della scelta dei coefficienti $a_{ik}\,(x)$ del ds^2. Per lo spazio ordinario, a tre dimensioni, l'espressione $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ossia la classe delle forme differenziali quadratiche riducibili a questa con trasformazione di coordinate curvilinee, conduce alla metrica della geometria ordinaria, che è solo *una* tra le infinite altre possibili. La limitazione posta da Riemann che il ds^2 sia una forma definita positiva viene oggi generalmente abbandonata; soprattutto dopo che la Teoria della Relatività Particolare di Einstein ha fornito con il suo spazio-tempo (cronotopo), di cui abbiamo ampiamente parlato, un esempio importante di spazio « quadri-dimensionale » a elemento lineare *indefinito*. Abbiamo visto nel cap. VIII, Parte I, sotto quale ipotesi una V_n si riduce a una *varietà piana* o *spazio euclideo* o a uno *spazio pseudoeuclideo*, così come abbiamo rilevato che spazi non piani si dicono *curvi* o *non euclidei*. In ogni spazio riemanniano le a_{ik} assumono però, in ogni singolo punto, determinati valori numerici, e il ds^2 può quindi ridursi, limitatamente a questo punto, a una somma di quadrati affetti da segni convenienti; e ciò, naturalmente, per ogni punto, ma con coordinate x_i generalmente diverse da un punto all'altro. *Uno spazio di Riemann può considerarsi, quindi, come piano in ogni sua parte infinitesima*; esso è come un *insieme di tanti pezzetti piani* (analogamente ad una superficie, che può considerarsi come insieme di pezzetti dei piani euclidei ad essa tangenti), *senza però che questi pezzetti siano in alcun modo tra loro legati* (d'accordo con il fatto che la superficie, o lo spazio, si pensano deformabili a piacere).

Non ripetiamo più quanto è stato detto nel cap. VIII, Parte I, circa gli spazi a curvatura costante (movimenti rigidi, libera movibilità delle figure) e quelli a curvatura variabile (movimenti non rigidi). È di Riemann la considerazione che *l'esser lo spazio illimitato* (cioè senza frontiere) *è una proprietà di estensione; l'esser lo spazio infinito è invece una proprietà me-*

trica. Uno spazio può essere illimitato e finito, può non avere frontiere e tuttavia non essere infinito com'è il caso di uno spazio a curvatura costante positiva. Un esempio di spazio (bidimensionale) illimitato e finito è la superficie sferica. La geometria di Riemann, partendo da premesse differenziali, relative cioè a un campo infinitamente piccolo, si domanda quali proprietà ne seguano per lo spazio intero. Essa si distingue nettamente dall'ordinaria geometria elementare, che fa intervenire lo spazio intero già nei primi postulati ; per es., nei postulati di appartenenza e in quello delle parallele. Uno dei concetti più caratteristici e profondi di Riemann è appunto quello di studiare le proprietà dei vari enti (nel nostro caso, dello spazio) partendo dal loro comportamento nell'infinitamente piccolo. Abbiamo visto nel cap. I di questa seconda parte quanto di analogo si è verificato in fisica, dove, con la tendenza a spiegare i fenomeni mediante una graduale propagazione attraverso un mezzo continuo, si sono abbandonate le azioni a distanza. Idee queste che precorrevano Maxwell e Einstein.

L'elemento lineare (97) coincide per $n = 2$ con la (95) e, per $n = 4$, con l'espressione (92) della Teoria della Relatività Generale. L'unica differenza fra la (92) e la (97) è questa : mentre la Teoria della Relatività postula la invarianza di ds^2 rispetto a sistemi reciprocamente in moto accelerato qualunque, la Geometria di Riemann pone la invarianza di ds^2 per ogni qualsiasi trasformazione di coordinate.

Con la ammissione della validità del Principio di Relatività Particolare nel sistema locale, siamo giunti al postulato della invarianza dell'elemento lineare « tetradimensionale » rispetto a tutti i sistemi di coordinate della Teoria della Relatività Generale. *Compito della Teoria della Relatività è, quindi, quello di formulare le leggi naturali generali in forma invariante per tutti i sistemi ammessi, sempre mantenendo la invarianza dell'elemento lineare.* In linguaggio *geometrico* ci si esprime così : nel continuo spazio-tempo «tetradimensionale» devono ricercarsi relazioni invarianti che comportino l'invarianza dell'elemento lineare (92) rispetto a tutti i sistemi di coordinate comunque mossi l'uno rispetto all'altro, o nei quali i campi di gravitazione si trasformino, spazialmente e temporalmente, ad arbitrio. Poichè in un sistema comunque mosso le coordinate spaziali e temporali variano, la loro variazione deve essere compresa nei limiti imposti dal postulato generale or ora enunciato. In tal modo siamo in perfetto accordo con la geometria differenziale di Riemann, i cui postulati di *invarianza* conducono a trasformazioni di coordinate *arbitrarie* compatibili con la invarianza dell'elemento lineare.

Kopff, a questo punto, fa una considerazione della più grande importanza, (48 ; 197) : « Tutte le misure, in ultima analisi, si riducono a misure spaziali e temporali ; misuriamo con regoli metrici, che sinora abbiamo supposto rigidi, con orologi il cui ritmo abbiamo supposto immutabile. Possiamo però abbandonare tali ipotesi senza che per ciò le nostre misure perdano la loro validità ; *queste si basano* infatti *solo sulla verifica di coincidenze spaziali e temporali.* In pratica per le coincidenze spaziali ci serviamo del maggior numero possibile di punti, per farvi corrispondere spazialmente altri punti ; per le temporali osserviamo il coincidere di un avvenimento con una determinata indicazione delle frecce dell'orologio. Se un regolo metrico si incurvasse o si allungasse comunque, se un orologio mutasse ritmo al mutar di posizione per il trasporto in diversi punti dello spazio, il processo di misura in sè non ne sarebbe turbato. Poichè la *coincidenza* è una proprietà che si addice tanto alle coordinate quanto ai parametri, da questo punto di vista non v'è affatto da attendersi un argomento che infirmi la Teoria della Relatività Generale. Il fatto che noi possiamo osservare solo coincidenze (e che percepiamo solo moti relativi) dimostra sufficientemente come non vi sia motivo per preferire taluni sistemi di coordinate ad altri ; *le leggi potranno considerarsi come generali, soltanto quando esse sian libere da ogni vincolo a uno speciale sistema di coordinate* : appunto in tale affermazione è il progresso essenziale che ha realizzato la Teoria della Relatività sulla Fisica classica ».

Notevolissime ancora le seguenti precisazioni di Kopff (48; 200) : « Secondo la Teoria della Relatività Particolare l'elemento lineare $ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ conservava lo stesso valore in tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme; si ammetteva che ogni regolo metrico conservasse inalterata la propria lunghezza e ogni orologio inalterato il proprio ritmo, al passaggio da un sistema ad un altro in traslazione uniforme rispetto a quello ; *lunghezza e ritmo dipendevano dalla velocità del sistema solo quando osservavamo il regolo e l'orologio da un sistema quiesciente rispetto ad essi.*

Nella Teoria della Relatività Generale l'elemento lineare $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ è invariante rispetto a tutte le possibili trasformazioni dei *parametri* x_i ; il valore di ds è ottenuto per mezzo di misure calcolate in un sistema locale con regoli infinitesimi ed orologi, ammettendo che questi non variano nel passare da un sistema *locale* ad un altro.

Come si comportano siffatti regoli ed orologi in un sistema *generale*? Se ci troviamo, *in persona*, nel punto dove devono essere eseguite le misure, i regoli infinitesimi e gli orologi non sono senz'altro adoperabili :

possiamo percepire soltanto incrementi parametrici spaziali e temporali, che, anche per uno stesso ds invariante, sono diversi da luogo a luogo. Poichè nella Teoria della Relatività Generale la misura naturale consiste nella determinazione di incrementi parametrici nel sistema generale, le lunghezze dipenderanno in ogni punto dai coefficienti dell'elemento lineare : alla lunghezza costante nel sistema locale fa riscontro la lunghezza variabile nel sistema generale ; altrettanto dicasi per i tempi ».

Se i parametri x_1, x_2, x_3 sono le coordinate spaziali e il parametro x_4 è la coordinata temporale di un punto universale, ogni legge fisica naturale, esprimibile con un sistema di equazioni differenziali tra detti parametri, deve mantenersi invariata al passaggio da un sistema all'altro, che avvenga a mezzo della sostituzione generale

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{98}$$

Se, per mezzo delle (98) si passa da un sistema generale K ad un altro, avremo, indipendentemente da ogni sistema locale,

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k = g'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k \tag{99}$$

I coefficienti g_{ik} sono funzioni dei parametri del sistema K. Nella Teoria della Relatività Particolare, in regioni *finite* arbitrarie si hanno evidentemente i valori :

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix} \tag{100}$$

Un punto materiale abbandonato a sè, in tali regioni, assume un moto rettilineo ed uniforme. Se, mediante la (98), passiamo ad un sistema spazio-tempo mosso a piacere, i g_{ik} diventano funzioni qualsiasi degli x_i. Il moto del punto, rispetto al nuovo sistema, è curvo e accelerato ; non dipende però dalla natura del punto stesso, il quale si trova in un campo gravitazionale, che, a seconda della sua natura, muta la dipendenza funzionale dei g_{ik} dai parametri, per modo che i dieci coefficienti g_{ik}, $(g_{ik} = g_{ki})$, dell'elemento lineare in un sistema spazio-tempo arbitrario caratterizzano il campo di gravitazione in ogni punto del sistema. Nel sistema locale, invece, i g_{ik} sono costanti e, mediante una trasformazione speciale, possono ricondursi ai valori (100).

Il problema consiste ora nel determinare i g_{ik}, in modo che rispecchino e descrivano la natura del cronotopo reale.

Premettiamo, con Finzi, brevissimi cenni sull'analisi tensoriale, che è un ampliamento dell'analisi vettoriale. In geometria, in meccanica, in fisica si debbono frequentemente considerare, accanto alle quantità scalari e alle vettoriali, delle quantità più complesse, subordinate in modo opportuno ad una terna di direzioni orientate dello spazio: le quantità tensoriali, rappresentabili cioè con *tensori*. Sono, ad es., quantità tensoriali l'insieme degli sforzi che si esercitano in un punto di un corpo continuo, l'insieme delle deformazioni che ivi producono gli sforzi precedenti, l'insieme dei coefficienti che individua, in un riferimento cartesiano, una quadrica con centro nell'origine, l'insieme dei coefficienti che danno in un punto le proprietà elastiche di un corpo, ecc.

Consideriamo nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale tre assi cartesiani ortogonali x_1, x_2, x_3. Rispetto a questi assi un vettore $\mathbf{v}$ è individuato dalle sue tre componenti cartesiane v_1, v_2, v_3. Se si passa alla terna cartesiana ortogonale x'_1, x'_2, x'_3, le componenti precedenti vengono sostituite dalle componenti v'_1, v'_2, v'_3 del vettore rispetto ai nuovi assi, e queste sono legate alle vecchie componenti dalle relazioni lineari omogenee:

$$
\begin{aligned}
v'_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \alpha_{13} v_3 \\
v'_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \alpha_{23} v_3 \\
v'_3 &= \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2 + \alpha_{33} v_3
\end{aligned}
\tag{101}
$$

che, in forma compatta, si scrivono

$$
v'_h = \sum_{1}^{3}{}_i \; v_i \, \alpha_h^i \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{101)'}
$$

Nelle (101)' α_{hi} $(h, i = 1, 2, 3)$ sono, pertanto, i nove coseni degli angoli che i vecchi assi formano con i nuovi. Un vettore è, quindi, un ente individuato dalle sue tre componenti in un riferimento cartesiano ortogonale e dalla legge (101), con la quale queste componenti si trasformano se si passa da un riferimento ad un altro. Un vettore può riguardarsi come un *tensore del prim'ordine.*

Dicesi *tensore doppio* o *del secondo ordine* un ente che, in dato riferimento cartesiano ortogonale, è individuato da tre vettori $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, così legati al riferimento stesso che, al cambiare di questo, si trasformino secondo la seguente legge, del tutto analoga alla (101)':

$$
\mathbf{T}'_h = \sum_{1}^{3}{}_i \; \mathbf{T}_i \, \alpha_h^i \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{102}
$$

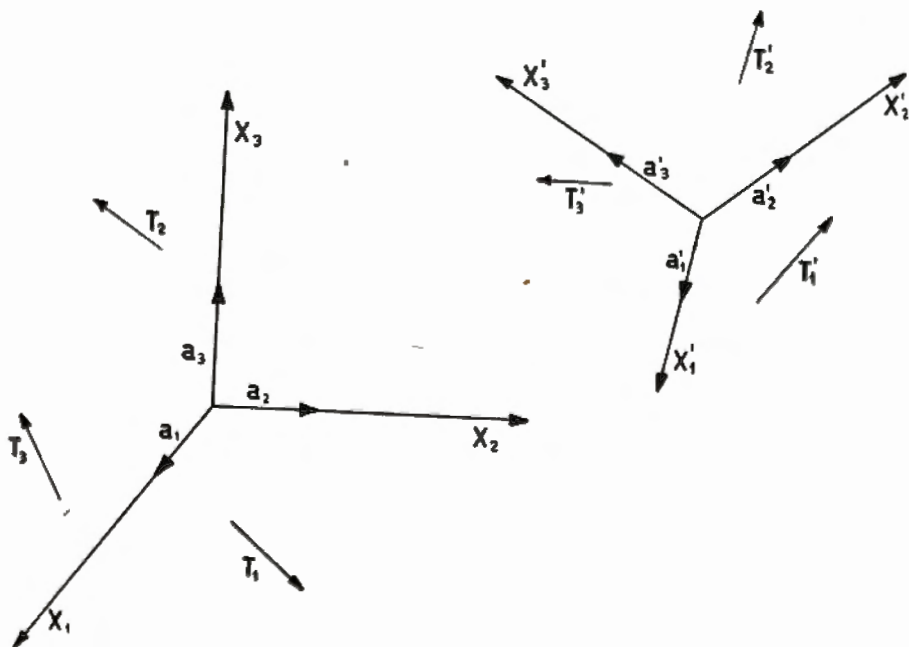
dove α_{ik} sono i nove coseni degli angoli formati dai tre vettori primitivi con i nuovi. Il tensore doppio può essere individuato anche, nel dato riferimento, assegnando le nove componenti dei tre vettori, e cioè

$$\begin{array}{llll} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \text{componenti di } \mathbf{T}_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \mathbf{T}_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \mathbf{T}_3 \end{array} \tag{103}$$

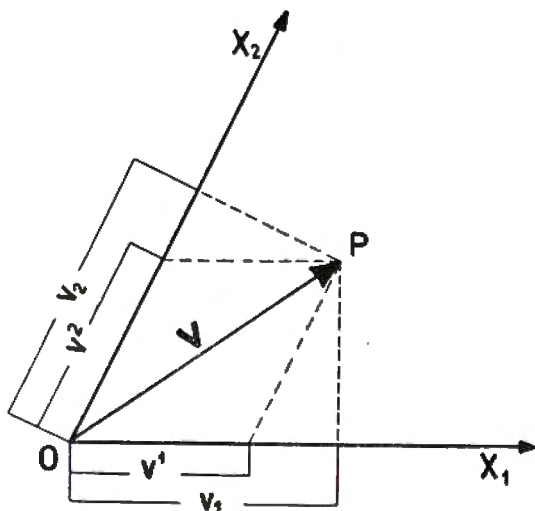
Al cambiare del riferimento, esse, come si deduce dalla (102) e dalla (101), si trasformano nelle nuove componenti legate alle precedenti dalle relazioni lineari omogenee:

$$T'_{hk} = \sum_{1}^{3}{}_{ij} \; T_{ij} \; \alpha_h^i \; \alpha_k^j \qquad (h, k = 1, 2, 3) \tag{104}$$

Generalizzando si ottiene la definizione del tensore d'ordine triplo, quadruplo... ennuplo. Uno scalare è riguardato come un tensore d'or-

dine $n = 0$. Prototipo dei tensori, che agli altri diede il nome, è quello degli sforzi, con il quale si caratterizza in un punto generico lo stato di tensione di un corpo continuo. Sulle operazioni algebriche tensoriali (somma e differenza, prodotto, composizione, saturazione, contrazione, ecc.) rimandiamo ai testi specializzati.

Finora ci siamo riferiti a coordinate cartesiane ortogonali. Spesso è utile riferirsi a coordinate generali, a coordinate cioè, come è notissimo che, come caso particolare, possono essere cartesiane ortogonali, ma possono essere anche d'altro tipo, come ad es., cartesiane oblique, o polari o cilindriche. In coordinate generali un vettore **v** può individuarsi mediante le sue tre *componenti covarianti* v_i (indici in basso = pedici) o mediante le tre componenti *controvarianti* v^i (indici in alto = apici), come si vede nella figura accanto. In coordinate cartesiane ortogonali le componenti covarianti coincidono con quelle controvarianti e si identificano con le componenti cartesiane del vettore.

I tre versori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, relativi ad una terna cartesiana ortogonale x, individuano il *tensore fondamentale*. Passando dalla terna x alla terna x' si ha

$$(105) \qquad \mathbf{a}_h = \sum_{1}^{3}{}_i \; \mathbf{a}_i \, \alpha^i_h$$

Infatti le componenti di $\mathbf{a}_h$ (versore dell'asse x'_h), rispetto alla terna x, sono i coseni direttori α^i_h $(i = 1, 2, 3)$. Le nove componenti scalari del tensore fondamentale sono

$$(106) \qquad a_{ik} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k \end{cases}$$

In coordinate generali dicesi *tensore fondamentale* il tensore doppio individuato, in forma covariante, da tre vettori $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$.

La metrica di una superficie è data dal quadrato del modulo ds, distanza fra due suoi punti infinitamente vicini: tale quadrato è dato dall'espressione differenziale nelle due variabili x_1, x_2

$$(106) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad \text{dove} \quad g_{ik} = g_{ki} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \times \frac{\partial P}{\partial x_k}$$

I coefficienti g_{ik}, nel caso generico di superficie non sviluppabile sul piano, sono funzioni delle coordinate; costituiscono il tensore superficiale, il *tensore fondamentale.* Estendendo questo stesso ad un generico continuo ad n dimensioni, si avrà analogamente la metrica di tale spazio, data da una forma differenziale quadratica in n dimensioni, analoga alle (106): g_{ik} ne rappresenta, ancora, il *tensore fondamentale.*

Generalizzando il concetto di *campo vettoriale* abbiamo il concetto di *campo tensoriale,* che nasce associando un tensore dello spazio ordinario ad ogni punto P dello spazio stesso o di una sua regione. Le componenti di questi tensori (speciale interesse ha il campo dei tensori fondamentali) sono costanti quando ci si riferisce a coordinate cartesiane, ma non così quando ci si riferisce a coordinate generali (poichè allora sono funzioni di tali coordinate).

Consideriamo un campo vettoriale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ nello spazio ordinario. Se ci serviamo di coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, i tre vettori $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_k}$ derivate parziali di $\mathbf{v}$ rispetto alle coordinate, rappresentano un tensore doppio, le cui nove componenti scalari, essendo costanti i versori $\mathbf{a}_i$ degli assi, sono

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_k} \times \mathbf{a}_i = \frac{\partial}{\partial y_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_i) = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \tag{107}$$

Questo tensore doppio si dice *derivato del vettore* $\mathbf{v}$.

Passando alle coordinate generali x_k, i tre vettori

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} = \mathbf{v}_{/k} \tag{108}$$

danno in forma vettoriale covariante il tensore derivato del vettore $\mathbf{v}$. La sbarretta indica la derivazione tensoriale. Le componenti scalari covarianti di questo tensore doppio sono

$$v_{i/k} = \mathbf{v}_{/k} \times \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - \mathbf{v} \times \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \, \partial x_k} \tag{109}$$

Se $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$ è costante, eguale ad $\mathbf{a}_i$, come avviene in coordinate cartesiane, risulta $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0$ e la (109) si riduce alla (107): le componenti del tensore derivato di un vettore sono le derivate delle componenti del vettore rispetto alle coordinate. Ma così non è in generale. Le compo-

nenti covarianti e le componenti controvarianti dei vettori $\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_k}$ si chiamano, rispettivamente, *simboli di Christoffel di 1ª e di 2ª specie.* Essi sono nulli in un riferimento cartesiano ; non nulli in un riferimento generale. Sull'analisi tensoriale, bastino, per i nostri scopi, queste poche notizie.

Accenniamo ora alla invarianza delle leggi naturali rispetto a sistemi di coordinate cartesiane, affini ed arbitrarie.

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato le (62), esprimenti la 2ª legge fondamentale della dinamica, che, vettorialmente, assume la forma (75). Facciamo un confronto fra le (62) e la (75). Le grandezze $\mathbf{F}$ e $\frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2}$ che figurano nella (75), sono due vettori di modulo diverso, di direzione e senso uguali. La seconda legge della dinamica, esprimente la proporzionalità tra la forza e l'accelerazione impressa, si può scrivere come differenza di due vettori

$$\mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2}$$

che risulta ancora un vettore di componenti $X - m \frac{d^2 x}{d t^2}$ ecc. Le (62) e la (75) sono quindi identiche, ma espresse le prime in forma cartesiana, l'altra in forma vettoriale ; ora, poichè le (62) valgono per ogni direzione della forza e dell'accelerazione e per ogni sistema cartesiano, la (75), sotto la precedente forma di due vettori, pone in evidenza che le equazioni (62) sono invarianti rispetto alla trasformazione di Galileo, poichè tanto la forza quanto l'accelerazione rimangono immutate in grandezza, direzione e verso in ogni sistema K in moto rettilineo uniforme rispetto a K', e soltanto per esso.

Se le componenti di un vettore $\mathbf{a}$ in un sistema cartesiano x sono nulle, cioè se si ha

$$a_x = a_y = a_z = 0 \tag{110}$$

esse saranno nulle anche in ogni altro sistema x', ottenuto dal primo per rotazione dei suoi assi ; si avrà cioè

$$a'_x = a'_y = a'_z = 0 \tag{111}$$

Le relazioni (110) e (111) possono sintetizzarsi nella relazione

$$\mathbf{a} = 0 \tag{112}$$

Se una legge naturale è espressa dal verificarsi della condizione che le componenti di un vettore si annullino, essa è invariante rispetto a trasformazioni lineari omogenee.

Si dimostra altresì: *le leggi naturali espresse dall'annullarsi di tutte le componenti di un vettore o di un tensore sono invarianti per tutti i sistemi di coordinate affini*, quelli per i quali vale la trasformazione di Lorentz. Le proprietà dell'*invarianza*, che per sistemi di coordinate affini *si estendono a grandezze infinite e a relazioni finite, in sistemi di coordinate arbitrari valgono soltanto per l'intorno infinitamente piccolo di un punto; le relazioni invarianti sono differenziali.* Tutte le considerazioni dell'analisi tensoriale generale si riferiscono dunque al «finito» e all'« infinitamente piccolo » in sistemi di coordinate affini; oppure solo all'infinitamente piccolo in sistemi di coordinate *arbitrari.* Con siffatti metodi di rappresentazione vettoriale e tensoriale si è posto in evidenza, ad es., che le equazioni di campo della Teoria degli elettroni sono invarianti rispetto alla trasformazione di Lorentz.

I vettori e i tensori sono, quindi, forme concise, atte ad esprimere le leggi naturali indipendentemente dalla scelta particolare di un sistema di riferimento. L'introduzione delle due specie di vettori (covarianti e controvarianti) e la loro estensione ai tensori è giustificato dal fatto che le equazioni della Fisica assumono uno spiccato carattere di semplicità e di evidenza e dal fatto che eliminano da sè ogni ricerca di invarianza. *I metodi di calcolo differenziale assoluto* (la trattazione analitica della Geometria intrinseca di una V_n riemanniana) del Prof. Gregorio Ricci-Curbastro (1873), sviluppati insieme a Tullio Levi-Civita, furono segnalati ad Einstein da Marcello Grossmann, collega al Politecnico di Zurigo del fondatore della Teoria della Relatività. Essi costituiscono lo strumento analitico naturale e più proprio per la espressione e lo sviluppo delle concezioni einsteiniane.

Legato alla determinazione delle g_{ik} del cronotopo reale è il concetto di *geodetica.* In una regione dello spazio, lontana dalla materia, il moto libero o spontaneo (cioè non prodotto da forze) di un punto è rettilineo uniforme (legge d'inerzia) e la corrispondente *linea oraria* (*o linea d'universo*) è una retta nel cronotopo pseudoeuclideo. Come si modifica questo risultato nel cronotopo reale? Einstein sostituì la classica affermazione newtoniana che « il Sole produce un campo di forze che costringe la Terra a deviare dal moto rettilineo e a muoversi di moto (quasi) circolare attorno al Sole stesso » con l'affermazione che « la presenza del Sole provoca nello spazio che lo circonda una curvatura del

continuo spazio-temporale. Il moto di un oggetto, entro il continuo spazio-temporale, può essere rappresentato da una curva chiamata *linea di universo* » (dell'oggetto stesso). Einstein dichiarò : « La linea d'universo della Terra è una geodetica nello spazio curvo a quattro dimensioni attorno al Sole » (36 bis ; *b* ; 82).

« Le manifestazioni della gravità, scrive Castelnuovo (21, *b* ; 300), non sono per la nuova fisica paragonabili agli effetti delle comuni forze che possiamo applicare ai corpi, producendo effetti diversi su corpi diversi ugualmente situati. Quelle manifestazioni non sono che il modo di esplicarsi della legge d'inerzia in uno spazio-tempo, il quale, per ragioni a noi ignote o da noi attribuite alla presenza di masse, presenta una deformazione rispetto allo stato ideale (di Minkowski o pseudoeuclideo), che lo spazio avrebbe ove non esistesse materia ». La gravitazione, pertanto, nella Relatività Generale non viene considerata come una forza ; spontaneo, per Einstein, è il moto che non sia prodotto o turbato da (altre) forze. Spontaneo è il moto di un proiettile che cade liberamente verso la Terra, spontaneo il moto della Terra attorno al Sole. *La linea universale descritta da un punto materiale in libero moto è una geodetica.* Questa legge non è se non una generalizzazione della legge d'inerzia di Galileo : *Un punto materiale libero si muove nello spazio agravitazionale con moto rettilineo ed uniforme.*

« Einstein, scrive Gialanella (37 ; 15), ammette che la linea oraria rappresentante un moto spontaneo sia una geodetica. Varie considerazioni rendono plausibile questo postulato. Anzitutto le geodetiche di uno spazio curvo sono le linee che più somigliano alle rette, le quali sono geodetiche di uno spazio piano (euclideo o pseudoeuclideo). Per lasciarci guidare dall'intuizione, sostituiamo allo spazio curvo un ente a due dimensioni, cioè una superficie ; le geodetiche della superficie sono le linee, che segnano su di essa la minima distanza fra due punti, vale a dire le posizioni assunte da fili tesi sopra la superficie. Nell'intorno di un suo punto, ossia sulla faccetta piana che possiamo sostituire alla superficie in quella piccola regione, una geodetica appare rettilinea. Similmente il breve tratto di una geodetica nel cronotopo, che attraversa l'intorno pseudoeuclideo di un punto di questo, appare rettilineo ; e così deve essere, visto che il moto spontaneo in quell'intorno si presenta come se la gravitazione non agisse, e valesse la sola legge d'inerzia. Un'altra ragione di analogia, favorevole al postulato di Einstein, sta in ciò che, nella stessa meccanica classica, il movimento spontaneo di un punto materiale costretto a giacere sopra una superficie è una

geodetica di questa ». Questa seconda analogia è più debole della prima, a causa di quel « costretto » (non si dice da che cosa), che rende "poco spontaneo" il moto del punto!

I pianeti, che, nella teoria di Newton, descrivono delle ellissi attorno al Sole per effetto del campo gravitazionale prodotto da questo, secondo il postulato di Einstein percorrono le traiettorie o linee orarie delle geodetiche del cronotopo curvo, rappresentante quel campo. Si presenta un procedimento per determinare il moto dei pianeti diverso da quello classico, poichè, per tale procedimento, non occorre applicare la legge di gravitazione di Newton.

Per determinare, quindi, le orbite-geodetiche dei pianeti, cioè le linee universali da essi percorse nel loro moto spontaneo, occorre determinare i valori g_{ik} dell'elemento lineare

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{92}$$

Una determinazione empirica, con osservazioni estese ad ogni punto-istante del cronotopo reale, dei valori g_{ik}, avrebbe potuto effettuarsi, ad es., lanciando da un punto generico x_i segnali luminosi o proiettili nelle varie direzioni e valutando su un orologio, ivi situato, i tempi, che essi impiegano a raggiungere un punto infinitamente vicino $x_i + dx_i$. Una esplorazione siffatta apparve però ad Einstein praticamente irrealizzabile. Per ricavare g_{ik} dalla conoscenza della distribuzione della materia e della energia nello spazio e nel tempo, Einstein seguì un'altra via, quella inversa: affrontò il problema generale prima del particolare, stabilendo *a priori* la metrica di uno spazio-tempo ove regna un campo gravitazionale.

Le 16 funzioni g_{ik} di x_1, x_2, x_3, x_4 (tensore fondamentale) che figurano nella (92), scritte per esteso, sono:

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix}$$

Essendo $g_{ik} = g_{ki}$, queste funzioni si riducono a 10. Queste 10 funzioni dovevano soddisfare ad un sistema di 10 equazioni alle derivate parziali. Einstein, nello stabilire così il tipo di queste equazioni, si lasciò guidare specialmente da due criteri: 1) la condizione che siffatte equazioni esprimessero proprietà geometriche *intrinseche* del cronotopo, cioè indipendenti dal sistema di coordinate a cui esso viene riferito,

soddisfacendo così al principio di Relatività Generale; 2) l'analogia con la teoria classica, nella quale la sola funzione incognita, cioè il potenziale newtoniano, soddisfa all'equazione di Poisson-Laplace a derivate parziali del secondo ordine, per cui anche le 10 equazioni tra le g_{ik} dovessero essere del secondo ordine e lineari nelle derivate seconde. La condizione 1) venne soddisfatta da Einstein esprimendo le sue leggi mediante forme tensoriali, che, come abbiamo visto, fanno assumere alle leggi fisiche un particolare carattere di evidenza e semplicità, eliminando da sè ogni ricerca d'invarianza. Quanto alla condizione 2) ecco quello che scrive Palatini (66 ; 811): « È ben nota la legge di gravitazione universale di Newton e l'importanza che essa ha in molti campi della Fisica, ed è pure ben noto che Newton non fece alcuna ipotesi sulla natura della forza di attrazione, ma con la famosa frase " *hypotheses non fingo* " si limitò ad affermare che le cose vanno *come se* ecc. Dopo di allora si tentò di spiegare in vari modi il fenomeno della gravitazione, ammettendo che esso sia dovuto ad azioni mediate, caratterizzate da certi sforzi, dalla densità o dal flusso di energia e dalla densità della quantità di moto, ossia da un opportuno *tensore energetico*. Tutto ciò si doveva esprimere mediante una o più equazioni differenziali fra gli elementi accennati. Ma i tentativi escogitati furono tutti sterili. Un passo solo, notevolissimo, fu fatto da P. S. Laplace, il quale sostituì alla considerazione della legge di Newton quella del campo gravitazionale, caratterizzato dalla funzione U (funzione potenziale), soddisfacente alla equazione di Poisson-Laplace

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f \mu \tag{113}$$

dove f è la costante di gravitazione universale e μ la densità delle masse gravitanti. (Tenendo presente la relazione $\mathbf{F} = -\mathbf{grad\ U}$, cui è legata l'equazione di Poisson $\Delta_2 U = div\ grad\ U = -4\pi f \mu$, e la legge del moto, è chiaro che) il moto di un punto P in quel campo è retto dalla equazione

$$\frac{d^2 P}{d t^2} = -\mathbf{grad\ U}$$

dove **grad U** è un vettore avente le componenti $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$.

Gli studi, cui accenniamo, sono antecedenti alla Teoria della Relatività: quando questa fu creata, gli studi furono ripresi, ma tutti i tentativi fatti per interpretare e inquadrare la legge di gravitazione nello

schema relativistico risultarono vani. Si noti che quasi tutti gli autori cercarono di mantenersi nell'ambito della Relatività Ristretta, conservando quindi l'ipotesi della costanza della velocità della luce e non accettando perciò il principio di equivalenza.

Era riservato ad Einstein il merito di risolvere anche questa questione, mantenendo il suo principio di equivalenza e creando una teoria relativistica e gravitazionale nello stesso tempo. Nella nuova teoria il quadrato dell'elemento lineare è (come sappiamo)

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{92}$$

Ogni scelta delle g_{ik} determina un particolare genere di spazio; però se si cambiano comunque le variabili, il ds^2, per il suo significato, non muta (è invariante) e non muta così neppure lo spazio. Coi coefficienti g_{ik} e con le loro derivate prime e seconde si può formare uno speciale tensore (*tensore di Riemann*) che ha venti componenti distinte, lineari nelle derivate seconde, il cui annullarsi esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè lo spazio sia euclideo ».

La forma fondamentale (92) non è, in generale, euclidea. I coefficienti g_{ik}, relativi alla natura dello spazio, sono incogniti, ma dal punto di vista qualitativo si deve ritenere che, in assenza di ogni azione fisica percettibile (presenza o moto di materia o, più generalmente, di qualche forma di energia), la (92) si riduce alla forma pseudoeuclidea della Relatività Ristretta. Tuttavia, anche quantitativamente le due forme debbono differire di pochissimo, cioè lo spazio deve scostarsi di pochissimo dalla forma euclidea e ciò in accordo con il fatto che le numerose esperienze effettuate nello spazio ordinario non hanno mai rivelato alterazioni apprezzabili dalla configurazione euclidea. Secondo Einstein la gravitazione è caratterizzata esclusivamente dai 10 coefficienti g_{ik} della (92), i quali si chiamano perciò *potenziali gravitazionali*.

Occorre notare che la (92) implica l'abbandono del postulato della fisica einsteiniana nella Relatività Ristretta: *continuum spatii et temporis est absolutum*.

I potenziali suddetti, individuando la metrica (92) del cronotopo reale, hanno un significato geometrico; d'altra parte il tipo di geometria che ricerchiamo è quello che meglio si adatta, che è meglio coordinabile ai fenomeni da descrivere. Poichè abbiamo assunto, come geodetica, non più la retta euclidea, ma la traiettoria di un corpo lanciato e lasciato *libero*, ciò significa che il modello geometrico, che vogliamo determinare, è quello che *ipso facto* si adatta a quel fenomeno della natura che chiamiamo gravitazione. Possiamo ignorare le cause fisiche,

l'intima natura di quel fenomeno, rilevando semplicemente il fatto che la geodetica dello spazio-tempo ha caratteristiche non euclidee, ma, come abbiamo detto al cap. VII, Parte I, è opportuno evitare frasi come questa di Finzi (67 ; XLV) : « La materia e l'energia possono *incurvare* lo spazio-tempo ». Queste espressioni si leggono in tutta la letteratura relativistica. Lo stesso Einstein scriveva (30, *e* ; 132) : « Riemann... pervenne alla concezione di una nuova idea di spazio, che negava a quest'ultimo la sua rigidità e ne riconosceva " la sua partecipazione agli avvenimenti fisici "». Si legge nei testi che « la Relatività Generale postula un'interdipendenza fra la natura dello spazio e i fenomeni fisici » (66 ; 815). Spesso si parla di « interdipendenza » o « solidarietà » fra spazio-tempo e fenomeni fisici, come, tra gli altri, scrive Finzi (35, *b* ; 213). Anche in Levi-Civita leggiamo (67 ; XLIII) : « La teoria della gravitazione di Einstein considera la struttura geometrica dello spazio ambiente come tenuissimamente, ma pur intimamente, dipendente dai fenomeni che vi si svolgono, a differenza delle teorie classiche, che assumono tutte lo spazio fisico quale dato a priori ». Questa « intima dipendenza », questa « solidarietà » o « interdipendenza », di cui parlano autori anche eminenti, come ho già mostrato, mi pare, oltrechè errata, superflua. Non esiste uno spazio fisico « dove » si svolgono i fenomeni : vi è solo lo spazio fisico *costituito* da corpi, enti concreti, campi e relativi fenomeni, in essi accadenti. Il concetto idealistico, kantiano, di spazio fa capolino con una tenacia psicologicamente spiegabile, ma razionalmente condannabile. È superfluo, oltrechè errato, quindi, parlare di « solidarietà » o « interdipendenza » nel senso detto sopra, a meno che si dia alla parola *spazio* il significato d'insieme di corpi e di campi che lo costituiscono ; ma, in tal caso, chi non avverte la banalità in cui incorrerebbe chi asserisse, ad es., che fra due poli elettrici e la scintilla, che si sprigiona fra di essi, vi è « solidarietà » ? Insisto sulla circostanza che la descrizione geometrica di un fenomeno fisico non significa affatto che il fenomeno fisico « s'identifica » con il modello geometrico che lo descrive. La gravitazione è, e non può non essere, un fenomeno fisico, che nulla ha a che vedere con l'astrazione geometrica. D'altra parte non mi pare che esista necessità alcuna per ricorrere a simile linguaggio, che, invece di render chiari i concetti, al contrario li rende astrusi. Per la descrizione dei fenomeni naturali noi scegliamo il modello o i modelli geometrici più adatti. Ecco tutto.

I fisici che precedettero Einstein, da Galileo, da Newton e da prima di loro, avevano adottato il modello euclideo perchè era quello che veniva direttamente suggerito dalle relazioni dei corpi rigidi dello spazio

ordinario, concepito immobile, vuoto, « in sè ». Einstein ha adottato un modello geometrico (la geometria di Riemann) che viene suggerito da quel fenomeno della natura, che chiamiamo gravitazione e che si riduce allo spazio euclideo quando il campo tende a zero (cioè non vi è presenza di masse, o, meglio, le masse sono molte remote). Fra i suoi grandissimi meriti la Teoria della Relatività ha anche quello di aver posto l'accento sul fatto che spazio fisico e fenomeni sono inseparabili, il che obbliga a riflettere più profondamente su ciò che si debba intendere appunto per spazio fisico : spazio fisico e fenomeni sono inseparabili semplicemente perchè lo spazio fisico coincide con i corpi e i campi di energia e quindi con i fenomeni che essi comportano.

Cosa significa allora che « vi deve essere qualche legame fra i potenziali g_{ik} e il tensore energetico relativo al fenomeno che si studia », come scrive Palatini (66 ; 815) ? Significa questo : che il tensore energetico (complesso di dieci elementi T_{ik}), che rappresenta il fenomeno fisico e i cui 10 elementi anzidetti sono astrazioni, da quello suggeriti, per descriverlo, si uguaglia al campo geometrico fondamentale, che dà in ogni punto il tensore fondamentale g_{ik}, individuante la metrica e la connessione di uno spazio riemanniano. Tale uguaglianza dice appunto che il modello di Riemann, lo spazio riemanniano, è quello che meglio si adatta a descrivere il fenomeno gravitazionale, rendendo superfluo introdurre una legge particolare, quella di Newton, che si rendeva necessaria quando si applicava alla natura il modello geometrico euclideo. Le equazioni che legano T_{ik} a g_{ik} si dicono *equazioni gravitazionali*. Non è superfluo ricordare che la meccanica classica dei mezzi continui (teoria della elasticità) già sapeva descrivere lo stato fisico della materia nello spazio mediante le componenti T_{ik} di un tensore simmetrico del secondo ordine, la cui estensione al cronotopo è immediata.

Dette equazioni gravitazionali debbono soddisfare al principio di Relatività Generale, e, a tal fine, come abbiam detto, basta dare ad esse carattere tensoriale nel cronotopo ; inoltre debbono essere atte a determinare g_{ik} quando sia assegnato T_{ik} , e quindi debbono essere dieci algebricamente indipendenti ; tante cioè quante sono le componenti indipendenti di un tensore doppio simmetrico in uno spazio-tempo. Le dieci equazioni, tuttavia, tenuto conto dell'arbitrio nella scelta del sistema di riferimento, possono ridursi a sei indipendenti.

Le equazioni gravitazionali si possono scrivere nella maniera seguente :

$$A_{ik} = -\chi\, T_{ik} \qquad (114)$$

dove χ è una costante universale e A_{ik} è un tensore doppio simmetrico (come T_{ik}), dipendente soltanto dal campo geometrico fondamentale $g_{ik} = g_{ik}(x)$. Il tensore doppio simmetrico $A_{ik} = A_{ki}$, descrive geometricamente la gravitazione e costituisce il cosidetto *tensore gravitazionale.*

Rimandando a testi specializzati chi volesse approfondire questo argomento, di cui diamo appena qualche cenno, aggiungeremo che si definisce un *tensore energetico* anche nel cronotopo pseudoeuclideo, dove fra gli elementi materiali non si esercitano azioni di sorta, neppure gravitazionali (35, *a*; 383). Se fra gli elementi materiali si esercitano invece delle azioni (azioni soltanto gravitazionali) le formule del tensore energetico recano traccia di tali azioni nella derivazione tensoriale, che in esse figura, e che è subordinata alla metrica di uno spazio-tempo riemanniano (35, *a*; 386). Per campi vuoti le equazioni gravitazionali si riducono ovviamente alla forma $A_{ik} = 0$. L'annullarsi delle A_{ik} comporta l'annullarsi del tensore di Riemann. Se ciò avviene in tutto lo spazio, questo deve risultare necessariamente euclideo.

Le equazioni gravitazionali, data la loro complessità, in generale non si possono integrare. Tuttavia si può operare una semplificazione, applicabile nei casi in cui g_{ik} non subisca rapide variazioni nel tempo, nei casi cioè nei quali il campo gravitazionale possa considerarsi *statico*. Allora i coefficienti g_{14}, g_{24}, g_{34} si possono trascurare. La variabile t può allora considerarsi dipendente dalla intensità del campo, senza altre connessioni con le coordinate spaziali.

Limitatamente a detto caso *statico*, Schwarzschild riuscì a determinare il ds^2 del cronotopo corrispondente al campo di gravitazione einsteiniano simmetrico intorno alla sola massa centrale M (per es. quella del Sole).

La (92) in coordinate polari, r, θ, φ analoghe alle polari negli spazi a tre dimensioni $t =$ cost., per le accennate considerazioni di simmetria, si scrive

$$(115) \qquad ds^2 = c^2 A\, d t^2 - (B\, d r^2 + r^2 d\, \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta\, d\, \varphi^2)$$

con A e B funzioni incognite di r.

Schwarzschild, integrando le equazioni gravitazionali semplificate nel modo anzidetto, ottenne $A = 1 - \dfrac{2\,m}{r}$ e $B = \dfrac{1}{1 - \dfrac{2\,m}{r}}$;

allora il quadrato dell'elemento lineare dello spazio-tempo, in coordinate analoghe alle polari, con il polo nel centro di attrazione, diventa

(116)
$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

dove m è una costante, avente la dimensione di una lunghezza, risultando uguale a $f\frac{M}{c^2}$ (essendo f la costante gravitazionale, M la massa centrale che provoca il campo e c la velocità della luce a distanza infinita da corpi materiali). Alla forma (116) dell'elemento lineare corrispondono delle linee geodetiche.

Ognuna di dette espressioni di campi gravitazionali, poichè il tensore del potenziale gravitazionale g_{ik} è il tensore geometrico fondamentale, determina la metrica del continuo. Per $r \longrightarrow \infty$ (cioè quando l'azione della massa attraente tende a zero) la (116) fornisce la metrica del cronotopo pseudoeuclideo della Relatività Ristretta. Diminuendo r, $\frac{2m}{r}$ cresce; cresce del pari il coefficiente di dr^2 fino a diventare infinito per $2m = r$, nel qual caso si ha una singolarità spaziale. Non potendosi concentrare ulteriormente, lo spazio diventa infinitamente curvo; il tempo inoltre *non scorre più* (s'annulla il coefficiente di dt^2). Per tale singolarità, essendo la massa del Sole $M = 1{,}98 \cdot 10^{33}$ gr., $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ gr.$^{-1}$ cm^3 sec.$^{-2}$, e $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm. sec.$^{-1}$ si ha $m =$ km. 1,47 circa e quindi $r = \backsim 3$ km. Dal fatto che la singolarità relativa ad ogni massa è a questa proporzionale, consegue che nell'Universo di Einstein le masse non sono infinite: l'estensione dell'Universo è limitata. Questa circostanza pone in evidenza la differenza esistente fra i campi di gravitazione einsteiniani e la teoria gravitazionale newtoniana. Nella meccanica celeste classica la massa di un corpo celeste, come il Sole e i pianeti, si considera spesso puntiforme, come se tutta fosse concentrata nel punto centrale, mentre nella Teoria della Relatività la condensazione non può superare un certo limite, che, per il Sole, come abbiam visto, si ha quando $r = \backsim 3$ km.

Nel confronto fra le due teorie è, altresì, fondamentale la differenza consistente nel fatto che, mentre nella Teoria di Newton si hanno forze gravitazionali agenti a distanza, cioè in maniera istantanea (con velocità infinita), nella Teoria della Relatività, esse agiscono a contatto. Scrive Finzi (35, *b*; 239) «Le azioni gravitazionali non

sono istantanee, ma si propagano (approssimativamente) con la velocità c della luce».

La (116) è l'elemento lineare per la determinazione delle linee geodetiche, traiettorie di un punto materiale in moto e soggetto solo alla azione del campo gravitazionale. Sia dalla (116) che da altra espressione di ds^2 (35, *b*; 235) trovata dall'eminente scienziato italiano, ripetutamente citato, Bruno Finzi, si deduce, attraverso geodetiche spazio-temporali, la legge del movimento dei pianeti. Si ha quindi il modo per formare l'equazione differenziale dell'orbita di un pianeta intorno al Sole, *senza bisogno, come abbiamo già rilevato, di introdurre le forze a distanza della teoria di Newton*: si ha pertanto la nuova teoria gravitazionale di Einstein. Dobbiamo però osservare che, sebbene le equazioni gravitazionali prescindano dalla legge di Newton, tuttavia, per la loro effettiva risoluzione o integrazione, come abbiamo esposto, occorre introdurre il valore della massa del Sole $M = 1{,}98 \cdot 10^{33}$ gr., che si ottiene, come abbiamo visto nel cap. XIII (Parte I), precisamente in base alla legge di Newton. Questa, pertanto, scacciata dalla porta, rientra dalla finestra!

Nel piano $\theta = \frac{\pi}{2}$, ponendo $u = \frac{1}{r}$, dalla (116) si deduce

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - 3\,m\,u^2 = cost. \tag{117}$$

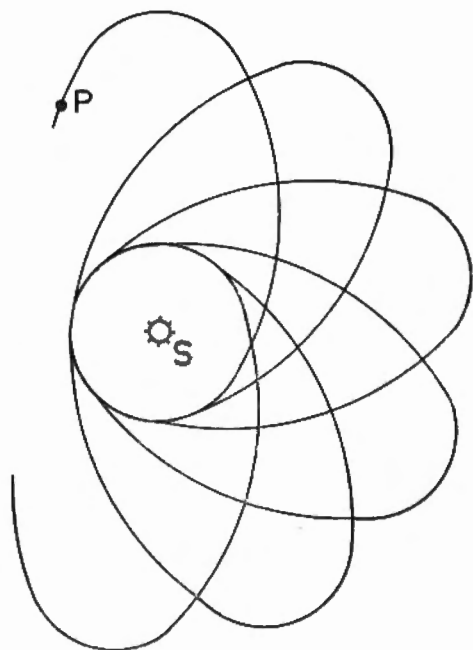
equazione che differisce solo per il terzo termine dall'equazione a cui conduce la legge di Newton. Infatti sommando membro a membro la (12) e la (13) del cap. XIII (Parte I) si ha, ponendo $u = \frac{1}{r}$ e ponendo φ in luogo di θ

$$\frac{d\,u^2}{d\,\varphi^2} + u = \frac{1}{p} \tag{118}$$

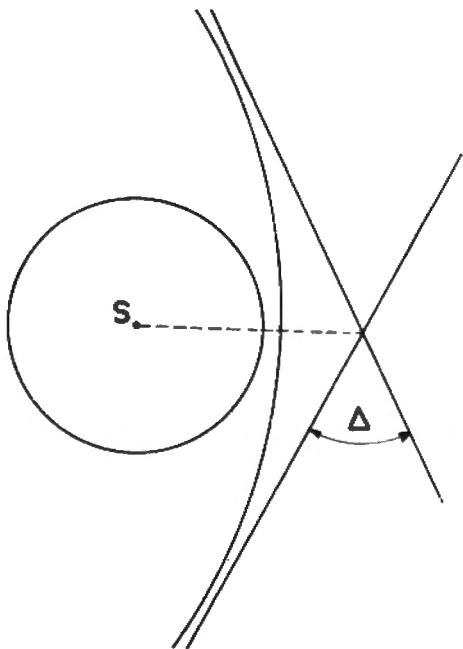
la cui soluzione è appunto l'equazione polare dell'ellisse riferita al fuoco (polo) e all'asse focale (polare)

$$u = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} \tag{119}$$

Essendo il termine $-3\,m\,u^2$ della (117) molto piccolo rispetto agli altri, in prima approssimazione si può trascurare e si ritrova l'orbita kepleriana (119). Una maggiore approssimazione conduce alla curva che descriverebbe secondo le note leggi lungo l'ellisse, mentre questa ruotasse

di un piccolo angolo nel verso del moto e nel proprio piano, intorno al fuoco situato nel Sole. Il pianeta, pertanto, descrive attorno al Sole un'orbita a rosetta, presentando uno *spostamento del perielio*. Questo spostamento ha carattere secolare, è cioè proporzionale al numero di rivoluzioni. Fra gli spostamenti dei perieli dei pianeti, il maggiore è quello di Mercurio, che raggiunge i 42″ per secolo, valore che deve aggiungersi ai 532″ dovuti alle perturbazioni degli altri pianeti. Armellini, Hall ed altri avevano già proposto interessanti spiegazioni del moto del perielio di Mercurio, ma lo stesso Armellini riconosce (9, *d*; 354) che *la migliore spiegazione è quella data dalla Teoria della Relatività*. Lo spostamento secolare relativistico del perielio di Mercurio è di 42″, in perfetto accordo con le osservazioni. La Teoria della Relatività non spiega tuttavia l'avanzo secolare di 10″ nel moto della linea dei nodi dell'orbita di Venere e spiega solo parzialmente (dando il valore di 1″,5 per secolo) il moto del perielio di Marte, che è, in realtà, di 8″ per secolo. Armellini afferma però (9, *d*; 355): «Sta il fatto obbiettivo ed indiscutibile che, per quanto riguarda il movimento dei pianeti intorno al Sole, il modello einsteiniano si adatta *meglio* del modello newtoniano».

La stessa equazione (117), ove si annulli il secondo membro, dà la traiettoria di un raggio luminoso, la cui linea d'universo nel cronotopo si ha per $ds = 0$. La curva è, all'incirca, un ramo di iperbole i cui asintoti formano un angolo che differisce di pochissimo da 180°. La differenza raggiunge il valore di 1″,75 quando la traiettoria sfiora l'orlo del Sole. La Teoria della Relatività prevede, pertanto, una leggera deviazione Δ dalla linea retta che il raggio di luce, proveniente da una stella, deve subire, quando passa in vicinanza del Sole, nel cui centro cade il fuoco interno della iperbole anzidetta. *Tale deflessione dei raggi luminosi*, nel campo gravitazionale del Sole, può essere osservato sol-

tanto in occasione di eclissi solari, perchè solo allora si possono scorgere stelle in direzioni prossime al Sole. Tenendo presente che sopra una lastra fotografica, posta al fuoco di un cannocchiale di circa sei metri di distanza focale, il centesimo di secondo d'arco corrisponde ad una lunghezza pari *ad un terzo di millesimo di millimetro* e se si tien conto, altresì, degli inevitabili errori di osservazione, delle aberrazioni del sistema ottico, della deformazione della gelatina delle lastre fotografiche, delle variazioni delle distanze focali per la temperatura, ecc., si comprende, Armellini avverte (9, *d*; 358), come sia *sommamente* difficile ottenere l'esatto valore di Δ. Bisogna eseguire molte osservazioni ed adottare la media dei valori ottenuti.

Per osservare l'eclisse totale di Sole, il 29 maggio 1919, scienziati inglesi si recarono, un gruppo nell'isola Principe (Golfo di Guinea) e un altro gruppo nell'isola Sobral (presso le coste del Brasile). Il primo gruppo trovò per Δ il valore 1",61, l'altro gruppo 1",98. La «media» diede il valore 1",79 molto prossimo a quello teorico di Einstein di 1",75. Diverse spedizioni si fecero in seguito, fornendo sempre una «media» pari al valore previsto dalla Teoria della Relatività. Anche la teoria corpuscolare della luce di Newton prevedeva una flessione dei raggi luminosi dovuta all'attrazione esercitata dal Sole sui corpuscoli che passano nelle sue prossimità: ma il calcolo fornisce per tale flessione un valore pari alla metà del valore previsto da Einstein, e cioè 0",87. Quindi, pur considerando che le medie di cui sopra sono fatte su un numero necessariamente modesto di osservazioni e rilevando altresì che i valori osservati sono sensibilmente discordanti, si deve riconoscere tuttavia che la Teoria della Relatività è quella finora più soddisfacente, anche dal lato quantitativo, per spiegare tale flessione.

La (116) conduce a prevedere un terzo fenomeno, e cioè *lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso*. Scriviamo la (116) nella forma data da Castelnuovo (21 ; 303)

(116)'

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2\right)$$

Scrive Castelnuovo (21 ; 304) : « Si supponga la durata del fenomeno così breve da poter riguardare come trascurabili gli spostamenti di luogo rispetto al sistema di riferimento ($dr = d\theta = d\varphi = 0$). Si ha in tale ipotesi

$$dt = ds : \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \tag{120}$$

Qui ds è la durata *vera* del fenomeno, valutata da un orologio naturale, posto ove il fenomeno accade ; dt è la durata *apparente* misurata da un orologio immobile rispetto al sistema di riferimento, ma non soggetto al campo solare ($r = \infty$). Se paragoniamo due fenomeni identici (come la emissione di una determinata radiazione), i quali abbiano luogo in due punti diversi, ma corrispondano ad uno stesso intervallo ds di *tempo-proprio* (periodo di radiazione), vediamo che l'intervallo apparente dt è tanto più lungo quanto più è piccolo r, cioè quanto più la sede del fenomeno è vicina al Sole. Il periodo di una radiazione che si verifichi sul Sole appare più lungo del corrispondente periodo di una radiazione terrestre. Ne segue che le righe dello spettro solare, confrontate con le corrispondenti righe di uno spettro terrestre, devono apparire spostate verso il rosso ».

Questo fenomeno, detto anche *effetto Einstein*, è *assai piccolo* e quindi molto difficile a riconoscersi, ma le difficoltà sono ancora maggiori per il fatto che *l'effetto Einstein* si sovrappone all'effetto Doppler. Gli astronomi, tuttavia, sono riusciti a confermare con le osservazioni l'esistenza dell'effetto Einstein negli spettri delle stelle ; ma vi è di più : essi, invertendo il problema, si servono dell'effetto Einstein per la determinazione delle masse stellari, dato che l'effetto stesso è proporzionale alla massa dell'astro da studiare e inversamente proporzionale al suo raggio. Determinato l'effetto Einstein su di un astro, mediante fotografie del relativo spettro, e noto anche approssimativamente r, si ricava la massa cercata. Trumpler, nel 1937, è riuscito a determinare

le masse di alcune stelle giganti, che, in alcuni casi, raggiungono valori centinaia di volte superiori alla massa del Sole, mentre, prima di allora, in base alla teoria della costituzione interna delle stelle, quasi si escludeva che le masse stellari potessero superare il valore di 100 volte la massa solare. Lo stesso Armellini, che in uno dei suoi ultimi scritti (9, *d* ; 363) fornisce queste notizie, invece nel suo Trattato di Astronomia Siderale (scritto negli anni 1928, 1931, 1936) afferma, come abbiamo visto nel cap. XIII (Parte I), che « le masse stellari variano dentro limiti assai ristretti » (9, *a*, II ; 85), ammettendosi, in base alla statistica, che « le masse stellari siano in generale poco differenti fra loro » ; su tale supposizione si fonda sia il « metodo delle masse per le stelle doppie » per la determinazione delle parallassi dinamiche (9, *a*, I ; 340) che la divisione di una vasta classe di astri in stelle giganti e stelle nane, ecc.

Nella Relatività Generale i fenomeni previsti sono reali o apparenti ? Castelnuovo si sofferma sulla questione, dando alla relazione (120) la sua giusta interpretazione anche da questo punto di vista : *lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso* (*effetto Einstein*) *deve considerarsi come effetto di un fenomeno reale.*

Altrettanto *reali* sono i fenomeni del moto a rosetta dei pianeti e la flessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale. Ciò deriva dal fatto che, a differenza delle relazioni lorentziane, riferite, come abbiamo visto, ad uno spazio pseudoeuclideo, nella Teoria della Relatività Generale vengono descritti obbiettivi fenomeni della natura e ciò per il modo stesso con cui è costruito il *ds*, per l'applicazione allo spazio reale, operata dalle equazioni gravitazionali, di uno spazio geometrico di tipo riemanniano, ossia per il fatto che le equazioni matematiche costruite da Einstein, attraverso derivazioni tensoriali subordinate alla metrica di un cronotopo riemanniano, recano tracce delle azioni gravitazionali.

Quantitativamente dette azioni vengono determinate introducendo nelle equazioni gravitazionali, come nel caso studiato, il valore *M* della massa del Sole, « la cui presenza, dice Einstein, produce un campo di forze » : si ricavano, quindi, le orbite *reali* dei pianeti.

C.W.W. (25 ; 129) fa notare come l'archipendolo (una specie di pendolo dotato di una scala), usato talvolta negli automezzi per misurare pendenze e variazioni di velocità, offra una prova del fatto che l'accelerazione rallenta il ritmo del pendolo. E poichè l'azione gravitazionale s'identifica con l'accelerazione, segue, ad es., che gli atomi vibranti tanto più rallentano il loro ritmo quanto più vicini si trovano

alla massa generante il campo : di qui lo spostamento verso il rosso delle righe dello spettro solare.

Rimandando al cap. II, Parte III, una trattazione minuziosa del fenomeno luce, osserveremo subito che, mentre a proposito della (88) abbiamo detto che la velocità della luce è costante rispetto ad ogni sistema di coordinate locale, riducendosi la Relatività Generale, in un intorno infinitamente piccolo, alla Relatività Ristretta, in un percorso finito, invece, nella Teoria della Relatività Generale, la velocità della luce *non è più costante*. Palatini, a proposito della prevedibile variazione della frequenza, in un campo gravitazionale, di qualunque radiazione monocromatica e, quindi, anche della velocità della luce, scrive (66 ; 811) : « Venendo allora contraddetto il principio della costanza della velocità della luce, si è costretti a rinunziare alla Relatività Ristretta o ad ammettere che tale teoria valga soltanto nel caso che manchi ogni campo gravitazionale ». Ora, mi sembra che la questione vada chiarita in maniera più precisa. La costanza della velocità della luce era ammessa nel *vuoto*, nello *spazio astratto euclideo* della prima Relatività. Nella Relatività Generale, dove si ha uno *spazio riemanniano*, rispecchiante le azioni del fenomeno gravitazionale, detta costanza non deve nè può più essere ammessa : senza dover rinunziare alla prima Relatività, si deve dire semplicemente che il principio della costanza della velocità della luce vale ancora quando, nell'infinitamente piccolo, la Relatività Generale si riduce al caso particolare, costituito dalla Relatività Ristretta. Non sussiste pertanto ombra di contraddizione.

Osservo ancora il mal vezzo di asserire, come fa Coleman (23 ; 119) ed altri che « il tempo scorre più lentamente su un pianeta relativamente grande, come Giove, che non sulla Terra » e frasi consimili. Sarebbe come dire che, avendosi un pendolo in una stanza *A*, che oscilla con un certo ritmo, e un secondo pendolo, oscillante con ritmo più lento, nella stanza *B*, si volesse asserire che il tempo fluisce in *B* più lentamente che in *A* ! Limitiamoci a dire : laddove agisce un campo gravitazionale il ritmo di atomi vibranti o di orologi rallenta rispetto al ritmo di atomi ed orologi dove il campo è meno intenso (o manca addirittura). Pensare che, rallentando il ritmo del pendolo, che sta, per esempio, sul mio tavolo, rallenti il tempo, è fantascienza ! Anche per il tempo ripeto quanto ho detto per lo spazio : fa ogni tanto capolino l'idealismo kantiano di uno « spazio in sè », di un « tempo in sè ». Come abbiamo provato per lo spazio, si prova che non vi è « un tempo in sè », ma solo strumenti (orologi) che misurano un certo aspetto dei processi della natura, che chia-

miamo durata: osserviamo soltanto *differenze di durata, differenze temporali*, non il « tempo in sè », astrazione idealistica al pari dello « spazio in sè ».

L'Universo einsteiniano *è finito pur non avendo frontiere*, cioè è *finito* e *illimitato*.

Abbiamo portato più sopra l'esempio di una superficie sferica. Abbiamo visto che dalla (116) segue che nell'Universo di Einstein le masse non possono essere infinite: la estensione dell'Universo è limitata. La curvatura dei raggi luminosi, provocata dalle masse gravitazionali, porta anch'essa a concludere che, pur non esistendo alcun limite esterno dell'Universo, questo *si chiude su sè stesso*. « L'Universo è finito, scrive Coleman (23; 129), perchè, se si viaggiasse continuamente lungo una geodetica fino a ritornare al punto di partenza dopo un certo tempo, la lunghezza percorsa sarebbe solo una quantità finita. E, in analogia con la superficie terrestre, tale lunghezza sarebbe misurabile ».

Quali valutazioni sono state date? Armellini scrive (9, *b*; 304): « Il raggio di curvatura dello spazio risulta eguale a circa 10 miliardi (10^{10}) di parsec » (cioè a circa 30 miliardi di anni-luce $= 3{,}085 \cdot 10^{23}$ km.). Per Eddington (29, *a*; 87) « il raggio iniziale dell'Universo, prima che cominciasse l'espansione (di cui parleremo fra un momento), è pari a 328 megaparsec = 1068 milioni di anni-luce ».

Analizzando le sue equazioni matematiche, Einstein giunse alla conclusione che la curvatura dello spazio deve essere indipendente dal tempo, nel senso che l'Universo, considerato come un tutto, deve essere immutabile (benchè già soggetto a modifiche interne). Con sua sorpresa trovò tuttavia che nessuna fra le soluzioni delle equazioni ammetteva l'esistenza di un cosmo statico. Einstein introdusse allora un'altra ipotesi, l'esistenza cioè di una forza, detta *repulsione cosmica*, che è indipendente dalla massa e che cresce proporzionalmente alla distanza fra gli oggetti interagenti (*comportamento che nessun'altra forza fisica possiede*).

Einstein apportò, quindi, una correzione alla sua legge di gravitazione introducendo un *termine cosmico*, dove figurava una costante naturale λ, detta *costante cosmica*. Attrazione e repulsione si facevano equilibrio e si aveva l'Universo statico. Si ebbero, anzi, due soluzioni: quella di Einstein e quella di De Sitter. Apparvero, quindi, due tipi d'universo, entrambi sferici, chiusi, finiti, statici. Vi era tuttavia fra i due qualche differenza: nell'universo di De Sitter doveva osservarsi un allontanamento apparente degli oggetti molto remoti, mentre questo non avveniva nell'universo di Einstein. Nel 1922 il matematico russo

Alexander A. Friedman scoprì un errore nella dimostrazione di Einstein di un universo statico. Costruendo la sua dimostrazione, Einstein aveva diviso ambedue i membri di un'equazione per una quantità che, come scoperse Friedman, in determinate circostanze poteva annullarsi (36 bis, *b* ; 84). Poichè i calcoli algebrici non consentono la divisione per zero, qualora le circostanze predette si fossero verificate, non si sarebbe potuto escludere la possibilità dell'esistenza di un universo non statico. Friedman dimostrò che i modelli possibili di un universo non statico erano due: nel tempo, uno rappresentava *l'Universo in espansione*, l'altro *l'Universo in contrazione*. Essendovi in azione due forze opposte, e cioè l'ordinaria attrazione newtoniana e la repulsione cosmica, laddove attrazione e repulsione si compensavano esattamente si aveva un universo in equilibrio statico, laddove invece ciò non avveniva si aveva un universo non statico ; e, precisamente, un universo in espansione, se la repulsione superava l'attrazione, un universo in contrazione se, viceversa, l'attrazione superava la repulsione. L'Universo di Einstein è instabile. « Basta un nulla, scrive Eddington (29, *a* ; 64), per farlo precipitare sia nel senso della espansione sempre crescente, sia in quello della contrazione sempre crescente. A quanto sembra, ha scelto l'espansione ».

« La soluzione di Friedman, scrive Gamow (36 bis, *b* ; 88), dell'equazione cosmologica di Einstein ammette, abbiamo detto, due tipi d'universo. Uno di essi è l'Universo « pulsante ». Secondo questo modello, quando l'Universo ha raggiunto una certa espansione massima, comincia a contrarsi ; la contrazione prosegue finchè la materia raggiunge una certa densità massima, probabilmente quella del materiale nucleare atomico, che è certo milioni di milioni di volte più denso dell'acqua ; a questo punto l'universo comincerà di nuovo ad espandersi, e così il ciclo si ripeterà all'infinito. L'altro è un modello « iperbolico » : esso immagina che moltissimo tempo fa l'Universo, allora estremamente rarefatto, abbia cominciato a contrarsi fino a raggiungere la densità massima, e da questo stadio abbia poi iniziato un'espansione illimitata, che continuerà indefinitamente nel futuro ».

Con queste vedute, l'Universo è finito o infinito ? Ciò equivale a domandarsi : la curvatura dello spazio è positiva o negativa ? Nello spazio euclideo il volume di una sfera aumenta proporzionalmente al cubo dell'aumento del raggio. Nello spazio curvo negativo l'aumento di volume è maggiore ; nello spazio curvo positivo è minore. A seconda che si constati, quindi, che il numero delle galassie entro una sfera aumenta a velocità inferiore o superiore al cubo del raggio della sfera

stessa, concluderemo che viviamo entro un universo a curvatura positiva o a curvatura negativa. I calcoli di Hubble condussero ad una curvatura positiva, ma, per ragioni su cui sorvoliamo, le sue conclusioni sono state poste in discussione.

La Teoria della Relatività Generale è vasta e complessa. Sul suo significato e la sua portata parleremo nel prossimo capitolo.

Nel concludere rileviamo un punto fondamentale: lo spazio fisico, nel senso da noi adottato, non è euclideo. La geometria di Euclide non vi si adatta. È necessaria una geometria non euclidea, come quella di Riemann, per descrivere la realtà fisica, una geometria che si riduce a quella euclidea solo in casi particolari. Il mito che la geometria euclidea fosse quella « reale », cioè quella, e la sola, che fosse coordinabile al mondo reale e che trovò nell'« a priori » di Kant un'ultima difesa, è caduto.

CAPITOLO IV.

Significato e portata della Teoria della Relatività.

I tre punti deboli della Teoria di Newton corretti dalla Teoria della Relatività – Concetto di simultaneità e concetto di spazio – Aspetto scientifico e filosofico delle idee innovatrici di Einstein.

La Teoria della Relatività rappresenta una tappa importantissima nella evoluzione dei concetti, che, durante molti secoli, non sembravano suscettibili di discussione. La portata delle concezioni einsteiniane è, quindi, molto notevole.

Con la Relatività Ristretta lo spazio e il tempo perdono il loro tradizionale carattere assoluto. Non esiste spazio assoluto nè tempo assoluto. Assoluto è il continuo spazio-tempo o cronotopo,come chiamò Gioberti, nella sua *Protologia*, continui siffatti.

Con la Relatività Generale Einstein alle due astrazioni sovrapposte della fisica classica, la legge d'inerzia e il campo statico delle forze, sostituisce una legge d'inerzia *generalizzata*, che fonde in una le anzidette astrazioni, soddisfacendo, al principio di ragion sufficiente per quanto concerneva l'« *indizio negletto* », cioè l'equivalenza della massa inerte con la massa pesante, fatto singolare, che, nella fisica classica, si presentava come una coincidenza puramente casuale. Nella Teoria di Einstein, poi, le azioni gravitazionali non si trasmettono istantaneamente, come nella Teoria classica, ma si propagano mediante *azioni a contatto*, e quindi con velocità finita. Queste correzioni, apportate da Einstein ai punti deboli della Teoria di Newton, comportano un franco avanzamento del pensiero scientifico e filosofico.

La Teoria della Relatività spiega il moto del perielio di Mercurio, rimasto precedentemente insoluto, ma, al pari della Teoria classica, non riesce a spiegare l'accelerazione secolare della Luna nè l'avanzo secolare di 10″ della linea dei nodi di Venere e solo parzialmente spiega il moto del perielio di Marte. Una nuova teoria, tuttavia, non è solo apprezzabile se è capace di risolvere *tutti* i problemi rimasti insoluti

nella teoria precedente, ma anche se, pur non risolvendoli tutti, ne spiega una parte. La Teoria della Relatività, spiega *meglio* della Teoria classica il fenomeno gravitazionale. Ci si potrebbe domandare in che consista la spiegazione della gravitazione data da Einstein. Ci spiega egli perchè i corpi si attirano? Occorre intenderci sul verbo *spiegare*: diciamo che un fenomeno che viene *descritto* in maniera più semplice di quella con cui veniva descritto da una teoria precedente, è *spiegato meglio*. Ma il progresso più notevole costituito dalle concezioni di Einstein consiste in questo, usando le sue stesse parole (30, *b*; 102): « Si tratta di conquiste dovute a nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo; si tratta di considerare vecchi problemi sotto un nuovo angolo visuale ». Da tempo era noto che la luce non aveva velocità infinita. Già nel XVII secolo Galileo, contro l'opposta opinione di Descartes, affermava che la luce aveva velocità finita, ma non lo potè provare con esperimenti validi. La prima determinazione della velocità della luce, senza impiego di metodi astronomici, fu fatta da Fizeau, nel 1849; e tuttavia si continuò nell'errore di credere che « accaduto simultaneamente » equivalesse a « veduto simultaneamente ». Un'impostazione esatta delle conseguenze del fatto che la velocità della luce è finita comportava, per l'appunto, una nuova maniera di pensare su esperimenti noti da tempo: infatti tale impostazione implicava la dipendenza del concetto di simultaneità da fatti sperimentali, urtando contro convinzioni metafisiche tradizionali (tempo assoluto). Il fatto che la massa inerte fosse eguale alla massa pesante era noto allo stesso Newton, ma occorreva una nuova maniera di pensare, occorreva svincolarsi da certe viete abitudini mentali, perchè quel fatto non apparisse più come una circostanza meramente casuale, ma si rivelasse come indizio di più profonde verità della natura. Einstein ha saputo liberarsi da pregiudizi tradizionali. Eddington rileva questo fatto quando scrive (29, *a*; 27): « Einstein introdusse una lieve correzione nella sua legge per risolvere certe difficoltà, che si presentavano nella Teoria: perchè in un punto almeno la Teoria non voleva camminare, ed era là dove interveniva l'infinito. A me pare che proprio nel modo semplice e radicale con cui risolse la difficoltà, Einstein abbia mostrato di essere grande. Infatti cosa fece? Soppresse l'infinito. Modificò leggermente le sue equazioni in modo da far sì che lo spazio, a grandi distanze, si incurvasse fino a chiudersi su se stesso ». Einstein, in linguaggio meno semplicista, comprese che lo spazio era il mondo delle cose, dei corpi, dei campi di energia e che un'indagine più profonda dei processi della natura comportava l'abbandono della geometria tradizionale per adattare a quei

processi uno strumento geometrico più consono e più adatto. L'infinito come pura astrazione geometrica non ha nulla a che fare con il mondo reale e se questo si presentava curvo e finito non restava che accettare i veri caratteri della realtà, senza lasciarsi turbare da quel mondo astratto della geometria, che, fino a Kant e con Kant, veniva confusa, identificata con la realtà stessa. Lo spazio e il tempo sono stati concepiti da Einstein in modo nuovo, in base « a nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo ». Questo è l'aspetto più considerevole dell'opera di Einstein, aspetto che ha avuto una influenza così profonda su tutti i campi della fisica, sia teorica che sperimentale, nonchè sul terreno filosofico e speculativo.

Le Teoria della Relatività corregge alcuni punti deboli della Teoria di Newton, rinnovando dalle radici alcune viete forme della nostra mente : da esse svincolati, faremo un altro tratto di strada, per colmare altre e non meno importanti lacune del pensiero classico e di quello moderno attorno al concetto del mondo, alla sua struttura, alla sua intima natura. Preciseremo, nella terza parte di questo lavoro, tali punti deboli dell'attuale concezione del mondo, proponendo una soluzione che implica «nuovi modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo».

RIASSUMIAMO

L'evoluzione del concetto di spazio segna, con la Teoria della Relatività, una svolta decisiva. A meno degli errori di osservazione, esperienze terrestri (Gauss ed altri) e misure astronomiche (Lobacevskij ed altri) avevano confermato che lo spazio doveva riguardarsi positivamente come euclideo. La Teoria di Einstein conduce, invece, alla conclusione opposta : *l'Universo reale non è euclideo.* L'ipotesi di uno spazio non euclideo, che esamineremo nella Parte Terza, è diversa da quella di Einstein ; tuttavia non vi è alcun contrasto fra le due ipotesi, ma, al contrario, deve ritenersi che entrambe possano e debbano essere ammesse. La Relatività Generale conduce alla costruzione di un Universo non euclideo, apportando delle correzioni ad alcuni punti deboli della Teoria classica di Newton. Con la nostra ipotesi proporremo adeguate soluzioni ad altri punti deboli dell'attuale concezione del mondo.

L'importanza della formulazione di Einstein di uno spazio universale *non euclideo* ci porta ad esaminare accuratamente come egli a tale formulazione sia giunto. Il mondo non euclideo scaturisce dalla Relatività Generale. La Relatività Ristretta è legata, ancora, ad uno spazio euclideo, ma è da essa che Einstein ha preso le mosse per formulare la Teoria della Seconda Relatività.

I punti deboli della Teoria di Newton, rilevati da Albert Einstein sono essenzialmente tre : 1) l'introduzione nel suo sistema del principio di spazio assoluto e tempo assoluto (sebbene lo stesso Newton si proponesse di introdurre il numero minore possibile di concetti, che non potessero riferirsi ai dati della esperienza) ; 2) l'introduzione di azioni a distanza, per spiegare gli effetti della gravitazione ; 3) la mancanza di una plausibile spiegazione dell'identità fra massa inerte e massa pesante (fatto singolare, che non sfuggì allo stesso Newton).

La volontà di Einstein di spiegare il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley fu l'incentivo per la costruzione della sua Prima Relatività. Postulando il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto, Einstein costruì quelle stesse formule di trasfor-

mazione, che Lorentz e Poincaré avevano trovato percorrendo altra via. Tale trasformazione, detta di Lorentz, colmava una lacuna della trasformazione classica di Galileo. Mentre, rispetto a questa, rimaneva inalterata la forma delle leggi meccaniche, ma non quella delle leggi fisiche, rispetto alla trasformazione di Lorentz erano invarianti, oltre che le equazioni della meccanica, anche quelle elettromagnetiche. Il principio di Relatività galileiano affermava l'indipendenza delle leggi, che regolano lo svolgimento dei fenomeni meccanici, dalla scelta del sistema cartesiano di riferimento fatta fra due sistemi in reciproco moto rettilineo uniforme.

La Relatività Ristretta estende il principio galileiano ai fenomeni elettromagnetici. L'apparente contrasto fra il principio della costanza della velocità della luce e il principio di Relatività veniva spiegato da Einstein con un'indagine approfondita del concetto di simultaneità. Due eventi, simultanei per un osservatore in un sistema K, a causa del fatto che la velocità della luce non è infinita, non lo sono per un osservatore situato in un sistema K', in moto rettilineo uniforme rispetto a K : bisogna distinguere fra « accaduto simultaneamente » e « veduto simultaneamente ». Il tempo non è assoluto ma relativo al sistema cui è riferito. Non vi è spazio assoluto e tempo assoluto ; assoluto è il continuo spazio-tempo o cronotopo. Con la Relatività Ristretta cadeva quindi il tempo assoluto e lo spazio assoluto di Newton.

Le equazioni di Lorentz sono state oggetto, talvolta, di errate interpretazioni, rilevate dal Prof. Straneo e da altri. La questione sulla realtà o apparenza dei fenomeni previsti dalle relazioni di Lorentz non presenta dubbi per chi si guardi dal mescolare concezioni relativistiche con concezioni assolutistiche : la trasformazione di Lorentz dà luogo a fenomeni di pura apparenza. Bisogna relegare nella fantascienza la storiella dei fratelli gemelli diffusa da Langevin.

Anche le leggi dinamiche assumono forme diverse nella Meccanica Relativistica. Einstein giunge alla celebre equazione $E = mc^2$, che, tuttavia, come ha mostrato lo stesso Einstein, si può dimostrare su basi classiche.

L'invariante pseudoeuclideo dello spazio-tempo si scrive :

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 \tag{84}$$

dove $x_4 = ct$, essendo c il valore costante della velocità della luce. Il suo annullarsi esprime il fatto che due punti possono venire congiunti con un raggio di luce. Per $s^2 \gtrless 0$ si hanno i significati che abbiamo illustrato.

La fisica ha tratto enormi vantaggi dalla Relatività Ristretta: *le grandi macchine acceleratrici di ioni e di elettroni funzionano solo se progettate secondo le leggi della Relatività Ristretta.*

Einstein, riflettendo sulla posizione privilegiata dei sistemi inerziali riguardo all'invarianza della forma delle leggi naturali, enunciò un principio di relatività più ampio, il principio di *Relatività Generale*: « Se K e K' sono due sistemi di coordinate, l'uno mosso *comunque* rispetto all'altro, lo svolgimento dei fatti naturali (meccanici ed elettrici) è sempre regolato dalle stesse leggi generali, tanto se riferiti a K quanto se riferiti a K' ». Con il famoso esempio dell'ascensore, Einstein fece rilevare che, in base all'identità fra massa inerte e massa pesante, è impossibile distinguere fra sistema in moto accelerato in uno spazio agravitazionale e sistema in riposo in un campo di gravitazione. Assumendo come *linea geodetica* il moto *libero* di un corpo, Einstein enunciò una legge d'inerzia *generalizzata* che si identificava con la gravitazione. In un intorno *infinitamente piccolo* il campo di gravitazione può considerarsi omogeneo: in esso si può scegliere sempre un sistema di coordinate K, tale che il campo di gravitazione sparisca, un sistema, cioè, la cui accelerazione coincida in grandezza e direzione con quella della gravità: il moto avviene, allora, come se il sistema fosse in quiete e come se non esistesse il campo gravitazionale. In un tal sistema, detto topico o locale, valgono i risultati della Relatività Ristretta, che è, pertanto, un caso particolare della Relatività Generale. L'invariante della Relatività Generale è la forma differenziale

$$(88) \qquad ds^2 = dx_4^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

Un sistema K, considerato, in ogni punto, come mosso arbitrariamente, dicesi *generale*. L'elemento lineare (88), nel sistema generale, diventa

$$(92) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

Per l'ipotesi della validità della Relatività Ristretta in tutti i sistemi locali, *l'elemento lineare ds* è invariante, comunque si scelga il sistema generale di riferimento. La forma (92) non è che l'invariante lineare della geometria intrinseca di Riemann: effettuando la somma rispetto ad i e k da 1 fino a 4 si ha l'elemento lineare del cronotopo della Relatività Generale.

Esaminati molto brevemente i principî del calcolo vettoriale e tensoriale, abbiamo rilevato che i vettori e i tensori sono forme concise, atte ad esprimere le leggi naturali indipendentemente dalla scelta par-

ticolare di un sistema di riferimento, in armonia con il principio che le leggi della natura sono intrinseche. Si dimostra che le leggi della natura, espresse dall'annullarsi di tutte le componenti di un vettore o di un tensore, sono invarianti per tutti i sistemi di coordinate affini, e, nell'intorno infinitamente piccolo di un punto, per tutti i sistemi di coordinate arbitrari.

Il moto *libero* dei pianeti è una geodetica del cronotopo : le orbite dei pianeti sono geodetiche. Per determinarle è necessario trovare il valore dei coefficienti g_{ik}, detti potenziali gravitazionali. A questo fine Einstein scrisse le sue dieci equazioni gravitazionali lasciandosi guidare da due criteri : 1) la condizione che siffatte equazioni esprimessero proprietà geometriche *intrinseche* del cronotopo, perchè fosse soddisfatto il principio di Relatività Generale : a questo fine adottò i metodi del calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita ; 2) l'analogia con la teoria classica, nella quale la sola funzione incognita, cioè il potenziale newtoniano, soddisfa all'equazione (113) di Poisson-Laplace a derivate parziali del secondo ordine, per cui anche le 10 equazioni tra le g_{ik} dovessero essere del secondo ordine e lineari nelle derivate seconde. Le 10 equazioni gravitazionali

$$A_{ik} = -\chi\, T_{ik} \tag{114}$$

esprimono il legame del *tensore gravitazionale* doppio, simmetrico $A_{ik} = A_{ki}$, dipendente solo dal campo geometrico g_{ik}, con il *tensore energetico* doppio simmetrico $T_{ik} = T_{ki}$, dipendente soltanto dallo stato fisico della materia e dell'energia. In altre parole, il tensore energetico, costituito da un complesso di 10 elementi T_{ik}, suggeriti per astrazione dal fenomeno fisico e atti a descriverlo, si eguaglia al campo geometrico fondamentale, il quale fornisce, in ogni punto, il tensore fondamentale g_{ik}, che individua la metrica e la connessione di uno spazio riemanniano. Tale eguaglianza dice appunto che il modello di Riemann (lo spazio riemanniano) è quello che meglio si adatta a descrivere il fenomeno gravitazionale, rendendo superfluo introdurre una legge particolare, quella di Newton, che si rendeva necessaria quando si applicava alla natura il modello geometrico euclideo. Alle due astrazioni sovrapposte, spazio euclideo e campo statico delle forze, della teoria classica, Einstein sostituisce una legge d'inerzia *generalizzata*, che fonde in una le anzidette astrazioni. Questo è quanto esprimono le (114) e, quindi, le (116). Quanto alla « solidarietà », o « interdipendenza » fra spazio-tempo e fenomeni fisici e frasi analoghe, si tratta di linguaggio con residui idealistici, kantiani ; non esiste alcuno *spazio* « dove » si svolgano

i fenomeni : vi è solo lo spazio fisico *costituito* da corpi, enti concreti, campi e relativi fenomeni. La descrizione geometrica di un fenomeno fisico non significa affatto che il fenomeno fisico « s'identifichi » con il modello geometrico, che lo descrive. La gravitazione, pertanto, resta ovviamente fenomeno fisico anche nella teoria della Relatività : un fenomeno fisico non ha nulla a che fare con l'astrazione geometrica.

Cade con la Relatività Generale il postulato riguardante lo spazio-tempo della Relatività Ristretta, il postulato, cioè, che afferma che il cronotopo è assoluto.

Con alcune semplificazioni Schwarzschild ha integrato la (116) trovando le orbite-geodetiche dei pianeti, che, in prima approssimazione, coincidono con le orbite kepleriane, ma che, in seconda approssimazione, spiegano lo *spostamento secolare* di 42'' del perielio di Mercurio. L'equazione differenziale dell'orbita di un pianeta intorno al Sole, trovata da Schwarzschild, mostra come nella teoria gravitazionale di Einstein *non occorre introdurre le forze a distanza della teoria di Newton*, dovendosi però rilevare che, per la sua effettiva integrazione, occorre conoscere il valore di M (massa del Sole) ricavato ancora dalla legge di Newton, da cui dette equazioni intendevano prescindere. Le azioni gravitazionali si propagano con velocità finita.

Altre conseguenze della Teoria della Relatività, confermate dalla esperienza (con qualche riserva da parte di alcuni fisici) sono la *flessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale* (la radiazione elettromagnetica è energia ponderabile soggetta alle azioni gravitazionali) e *lo spostamento delle righe spettrali verso il rosso* (le azioni gravitazionali rallentano il ritmo del pendolo e degli atomi in oscillazione). La velocità della luce, quindi, nella Teoria della Relatività non è più costante. Siffatti fenomeni sono *reali*, cioè non dipendono dall'osservatore, ma da azioni fisiche obbiettive, presenti là dove si svolge il fenomeno. Dall'espressione differenziale di Schwarzschild si deduce, altresì, che l'estensione dell'Universo einsteiniano è finita. L'Universo della Relatività Generale è, pertanto, di natura *non euclidea, illimitato* (per non avere frontiere) *e finito*. Un esempio di spazio illimitato e finito lo abbiamo nella superficie sferica dello spazio bidimensionale.

Abbiamo, infine, fatto un cenno sulla *repulsione cosmica*, sulle ipotesi di *universi in espansione, oscillanti* e *in contrazione*. Abbiamo concluso la parte seconda soffermandoci sul significato e la portata della Teoria della Relatività, rilevando che l'aspetto più cospicuo dell'opera di Einstein è quello di avere introdotto, nel campo scientifico, « nuovi modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo », rin-

novando dalle radici alcune viete forme della nostra mente. Da queste svincolati, proporremo una nuova ipotesi, in ordine alla natura dello spazio, ipotesi che non contrasta con quella di Einstein, ma, al contrario, vi si affianca, per risolvere altri punti oscuri dell'attuale concezione del mondo. L'ipotesi, che proporremo, comporterà una interpretazione nuova dell'Universo in base a « esperimenti e fenomeni noti da tempo ».

PARTE III

UNA NUOVA CONCEZIONE DEL MONDO

CAPITOLO I.

I punti deboli dell'attuale concezione del mondo.

Le Cefeidi e il loro comune comportamento – I raggi cosmici e la loro simmetrica caduta sulla superficie terrestre – La legge di Newton e il suo implicito mondo di infinite masse – Spazio cosmico uniforme – Favolosa durata dei raggi luminosi (anni-luce) – Dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole – La Terra, il più denso dei corpi del Sistema Solare – La Terra, pianeta favorito per la sua abitabilità – Le stagioni e le cause delle differenze di temperatura – Luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna – Analogia fra l'atomo e il sistema planetario – Il magnetismo terrestre e la sua origine – I vertiginosi voli di astri colossali con densità quasi nulla – Teoria della deriva dei continenti – Le estrapolazioni.

Non ci sono grandezze fisiche immediatamente misurabili. Al contrario, ogni misura non acquista senso che attraverso l'interpretazione datale dalla Teoria.

PLANCK

Nella seconda parte abbiamo esaminato perchè e come Albert Einstein sia pervenuto alla conclusione che *l'Universo reale non è euclideo.* D'accordo con le nostre precedenti considerazioni, potremmo anche dire che Einstein, esaminando alcuni aspetti della natura, in particolare la circostanza che massa inerte = massa pesante (fatto assolutamente accidentale nella Teoria classica), è pervenuto alla conclusione che la geometria che si adatta, che si coordina meglio al mondo fisico e ai suoi fenomeni non è la geometria euclidea. « Adattarsi, coordinarsi meglio » significa che la geometria (differenziale) da lui applicata consente scrivere equazioni matematiche (le equazioni gravitazionali), le cui soluzioni si approssimano di più delle formule classiche (legge di Newton) ai dati delle osservazioni (per es. lo spostamento del perielio di Mercurio). « Adattarsi » significa che la geodetica einsteiniana rispecchia meglio della classica (la linea retta euclidea) il comportamento della luce. L'elemento lineare einsteiniano fornisce la traiet-

toria curvilinea percorsa dalla luce in presenza di masse, tendendo tale traiettoria a coincidere con quella classica, quando siffatte masse sono molte remote. Questo essenzialmente significa che l'Universo, per Einstein, non è euclideo.

La Teoria di Einstein, come abbiamo esposto, colma tre lacune della teoria di Newton : 1) lo spazio *assoluto* e il tempo *assoluto* ; 2) le forze gravitazionali agenti istantaneamente, e non mediatamente, a distanza ; 3) l'eguaglianza *accidentale* della massa inerte e della massa pesante.

Considereremo ora altri punti deboli dell'attuale concezione del mondo e mostreremo nei capitoli successivi come una diversa interpretazione di alcuni fenomeni della natura ci consentirà di colmare le lacune che ci accingiamo a rilevare.

1) *Le Cefeidi e il loro comune comportamento.* — Abbiamo esaminato (cap. III, Parte I) le stelle variabili dette Cefeidi. De Sitter scrive (9, *c* ; 87) : « *Tutte le nostre cognizioni* sopra l'ampiezza del sistema galattico e sopra le dimensioni dell'Universo (o meglio di quella parte dell'Universo raggiungibile con i nostri limitatissimi mezzi di osservazione) sono, in fondo, *basate sopra le Cefeidi* ». Abbiamo visto come dalla discussione di una serie di osservazioni Miss H. Leavitt ricavò la relazione (51), fondamentale per la determinazione delle distanze celesti, che lega la grandezza media assoluta M di una Cefeide al suo periodo P. Tale relazione, scrive Armellini (9, *c* ; 199), « sembra ormai dimostrato che dipenda dal fatto che le Cefeidi sono *stelle pulsanti* e che la durata P della loro pulsazione dipenda dalla massa e quindi anche dalla loro grandezza assoluta M ».

Su 171 Cefeidi, Margarita Güssow ne trovò un centinaio con periodi compresi fra un giorno e un mese (9, *a*, II ; 356). Fra queste ve ne sono un gruppo di 40 o 50, di periodo approssimativamente uguale, aggirantesi in media a 5 giorni. « Le variabili *Cefeidi* del medesimo periodo, scrive Eddington (29, *b* ; 114) sono tutte rassomigliantissime ; quindi una *Cefeide* del periodo di 5 giorni e un terzo, dovunque scoperta, va praticamente considerata alla stregua di una copia della δ *Cephei* ». Queste caratteristiche comuni, questi modi d'azione così vicini farebbero pensare a un qualche legame fisico, ad azioni reciproche dovute a vicinanza, a raggruppamento, ma i calcoli astronomici ci dicono che la distanza fra stella e stella è immensa.

Rispondendo, fra l'altro, ad una mia domanda circa la esistenza di variabili aventi esattamente lo stesso periodo, il Prof. Leonida Ro-

sino, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Padova, in data 17 dicembre 1957, molto cortesemente mi scriveva: « Che poi vi siano, in questa o in altre galassie, Cefeidi aventi il medesimo periodo, ma non fisicamente associate, è possibile, ma si tratterebbe d'un evento puramente casuale ». Nella teoria classica, quindi, la grande somiglianza (o eventuale identità) fra le stelle variabili di detto gruppo, *non essendo fisicamente associate,* deve attribuirsi solo al caso.

2) *I Raggi Cosmici e la loro simmetrica caduta sulla superficie terrestre.* — « La Terra, scrive Vercelli (89; 499), ovunque si trovi nel suo viaggio maestoso attraverso gli spazi, alla luce del giorno o nelle tenebre della notte, è immersa in una grandine incessante di particelle atomiche velocissime, che provengono da ogni parte dell'Universo, entrano nell'atmosfera, urtano le molecole provocando cospicui effetti, e, in parte, giungono fino al suolo ». E più oltre (89; 501): « Lo studio dei raggi cosmici è stato intensificato in tutto il mondo e spinto alle altezze e alle profondità estreme. Si sa ora che dai liberi spazi entrano nell'atmosfera, a medie latitudini, circa 20 particelle per cm^2 e per minuto, in totale quasi due miliardi di miliardi per secondo in tutto il globo. La quasi totalità di queste particelle sono *protoni* (nuclei d'idrogeno, l'elemento più diffuso nell'Universo); una piccola percentuale è costituita da nuclei più pesanti. La Terra, gigantesco campo magnetico, devia dal loro corso i raggi cosmici e lascia penetrare nell'atmosfera solo le particelle che hanno energia superiore a certi limiti. Questa atmosfera suole essere misurata in elettroni-volt (*ev*), unità assai piccola pari a $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg. Si usa spesso il multiplo mega-elettrone-volt (*mev*), pari a un milione di *ev*. I protoni entrano nell'atmosfera con energia variabile tra vasti limiti, in media (alle nostre latitudini) 10 mila *mev* per ogni particella, il che corrisponde a una velocità di poco inferiore a quella della luce. I raggi cosmici attraversano il nostro corpo a milioni, ogni giorno, e passano inavvertiti; non sappiamo quali effetti biologici possano provocare nel mondo dei viventi ». A proposito dell'origine e della genesi dei raggi cosmici Carlson scrive (19; 452) che nessuno ne sa nulla. Si possono fare solo delle congetture. Così poi si esprime testualmente: « S'è parlato anche di elementi transuranici e di elementi radioattivi, che si troverebbero chissà dove nel mondo ». « Queste radiazioni, scrive Armellini (9, *a*, II; 167), non possono provenire dal Sole e, analogamente, sembra logico supporre che esse non provengano nemmeno dalle stelle. Sembra probabile che siano dovute principalmente ai processi di formazione degli elementi, che hanno luogo

nelle nebule o nella materia tenuissima diffusa negli spazi interstellari ». Queste, in breve sintesi, le notizie raccolte dagli Autori sui raggi cosmici. Ma vi è ancora una circostanza del più alto interesse. Lasciamogliela dire a Eddington (29, *a* ; 101) : « Non si è verificata che una perdita relativamente piccola per assorbimento. Questo si accorderebbe assai bene con la simmetria osservata nella loro distribuzione... L'interesse degli astronomi per i raggi cosmici fu destato dalle ricerche di Kohlhörster ; si diceva in quel tempo che le osservazioni indicavano una provenienza sopratutto dalla direzione del piano della Via Lattea. Si era quindi portati a supporre che avessero origine all'interno delle nebulose gassose e della materia diffusa che si trovano nella nostra Galassia. Le ricerche ulteriori e più precise di Millikan hanno provato tuttavia che una tale orientazione preferenziale non esiste, e che la distribuzione è su per giù uniforme in ogni senso. Se dunque i raggi hanno veramente una origine extraterrestre, se la sorgente deve essere distribuita simmetricamente attorno alla Terra, l'astronomia non ci rivela nulla che presenti la simmetria richiesta, a meno che non si venga ad abbraccciare l'intero universo. E forse potremmo trovare nei raggi cosmici un argomento a favore dello spazio sferico chiuso; poichè in un sistema non chiuso sarebbe una strana combinazione che la Terra si trovasse collocata così centralmente da ricevere i raggi in misura uguale da ogni parte ». È una « strana combinazione » davvero ! La Terra copernicana non è al centro dell'Universo, chè, altrimenti, sorvolando su altre difficoltà, tanto valeva lasciarla dove l'aveva posta Tolomeo ! Piuttosto osserveremo che il comportamento dei raggi cosmici, con la loro simmetrica caduta sulla Terra, farebbe pensare ad un loro comune luogo di origine. La Teoria classica evidentemente non può fornire di tale fatto una spiegazione esauriente.

3) *La legge di Newton e il suo implicito mondo di infinite masse.* — Secondo la teoria di Newton, ogni pianeta percorre attorno al Sole un'orbita ellittica. Il Sole, a sua volta, e le stelle che gli sono vicine, come scrive Bok (13 ; 92), ruotano attorno al centro della nostra Galassia in orbite, grosso modo, circolari e ad una velocità di circa 238 km./sec. Rispetto poi all'insieme delle stelle lucide, il Sole si muove verso la costellazione dell'Ercole con una velocità pari a circa 20 km./sec. Poichè la legge di Newton regge l'intero Universo, tutto l'enorme sistema comprendente il Sole percorre, a sua volta, un'orbita attorno ad un altro centro di masse (astri) ancora maggiori, e questo, seguito da tutta l'immensa famiglia di astri, che gravita su di lui, girerà ancora attorno

ad un altro astro (o altri astri) di massa ancora più imponente, e a distanze sempre maggiori, e così via. Non c'è nessuna ragione, ammessa la legge di Newton, per cui ciò non debba avvenire.

Riferiamoci alla figura in basso, a sinistra, della Tav. VIII. Supponiamo che *A* sia il «nostro» Sole, attorno al quale ruota, in piccola scala, per es. Nettuno, e che *B* sia un Sole ancora più grande, attorno al quale gira il nostro Sole. Poichè *B*, con la sua famiglia di Soli minori e i loro rispettivi sistemi planetari, non può rimanere fermo, deve necessariamente volare, insieme con altri Soli del gruppo *C* e *D*, in lunghi circoli attorno al Sole gigante E. A sua volta *E*, con la sua serie di sistemi solari da lui dipendenti, deve volare attorno ad un Sole ancora più grande e più distante, e così via *fino all'infinito*! D'altra parte l'Universo, come conclude (ma con molte riserve) la Relatività Generale, è finito. Nè la Relatività, come abbiamo rilevato, elimina del tutto la Teoria di Newton, perchè, mentre le sue equazioni (gravitazionali) prescindono dalla legge di Newton, per la loro pratica integrazione è necessario conoscere il valore di *M* (massa del Sole), ricavato mediante la legge di Newton. Einstein fornisce uno strumento più semplice e più efficace per descrivere il fenomeno gravitazionale, identificando l'orbita di un pianeta con la geodetica di uno spazio-tempo $\equiv$ campo gravitazionale.

Egli elimina le azioni agenti a distanza; le forze gravitazionali non si propagano, come nella Teoria classica, con velocità infinita. Ciononostante, le anzidette conseguenze della Teoria di Newton non mi pare che vengano eliminate dalla Teoria einsteiniana della gravitazione. Occorre aggiungere che gli ultimi sviluppi della Teoria della Relatività sono incerti sulla risposta da dare alla domanda: l'Universo è finito o infinito? Ciò leggo in recentissime pagine di Gamow (36 bis, *b*; 91).

Secondo le ricerche ultime dei relativisti (Universo in espansione) si prospetta la necessità di ammettere un Universo infinito! Infinite masse, infiniti astri, implicano concetti che vanno al di là della fisica. È un punto debole dell'attuale concezione del mondo.

4) *Spazio cosmico uniforme*. — «Viviamo in un immenso spazio, scrive Lämmel (49; 31), in cui si trova relativamente poca materia, sicchè con ragione possiamo chiamarlo deserto». Anche Eddington, riferendosi allo spazio universale, lo dice «vuoto», «deserto» (29, *a*; 5). «Si ha una stella ogni venti parsecs cubici» ci informa Armellini (9, *a*, II; 292). Ricordiamo che un parsec è una lunghezza pari a $3{,}085 \cdot 10^{13}$ km., cioè più di 30 milioni di milioni di chilometri. Supposte le stelle

ripartite uniformemente, immaginando di trovarci su una stella, per raggiungerne un'altra, viaggiando con la velocità della luce (300.000 chilometri al secondo) impiegheremmo più di 6 anni! Il concetto, che abbiamo ampiamente criticato, dello « spazio vuoto, in sè » deve, in parte, il suo persistere nelle menti a questa concezione dello spazio « deserto ». Eddington (29, *a*; 87) calcola una densità media iniziale della materia nell'Universo pari a $1{,}05 \cdot 10^{-27}$ gr. per cm^3, cioè 1 atomo di idrogeno per ogni 1580 centimetri cubici. Per Armellini, se tutta la materia stellare venisse uniformemente ripartita nello spazio, si avrebbe una densità di materia pari a un grammo per ogni cubo avente 100.000 chilometri di lato. « La materia è assai rara nell'Universo » (9, *b*; 300). Si potrebbe obbiettare con le parole di Poincaré (74, *b*; 158): « Se i nostri sensi fossero abbastanza sottili da mostrarci tutti i particolari dei corpi studiati dal fisico, lo spettacolo che noi scopriremmo differirebbe appena da quello contemplato dall'astronomo. Anche lì noi vedremmo punti materiali separati gli uni dagli altri da intervalli enormi rispetto alle loro dimensioni, punti che descrivono orbite secondo leggi regolari. Questi astri infinitamente piccoli sono gli atomi » (o, meglio, gli elettroni attorno al nucleo). Al che si può replicare con le parole di Planck (73; 201): « Secondo la fertilissima teoria di Niels Bohr, gli elettroni di un atomo si muovono attorno al nucleo secondo leggi assai simili a quelle secondo cui i pianeti si muovono attorno al Sole. Al posto della forza di gravitazione subentra qui l'attrazione delle cariche opposte del nucleo e degli elettroni. Ma c'è la singolare differenza che gli elettroni possono circolare soltanto su orbite ben determinate, che differiscono l'una dall'altra in modo discreto, mentre, nel caso dei pianeti, nessun'orbita sembra preferita rispetto ad un'altra ». Quindi, confrontando gli *enormi intervalli* atomici rilevati da Poincaré con gli *enormi intervalli* astronomici, si rileva la *singolare differenza* che i primi trovansi in uno spazio non euclideo, non uniforme, al contrario dei secondi. Abbiamo rilevato l'uniformità dello spazio necessariamente concomitante con il « deserto spaziale », e questo non è il caso dello spazio atomico.

La rarità della materia, dunque, nell'Universo, il vuoto uniforme dello spazio cosmico non può non sorprendere. Questo spettacolo di uniformità, per cui, salvo qualche punto « singolare » costituito dai corpi celesti, lo spazio classico è praticamente « vuoto », « deserto », talchè ogni suo punto, ogni sua giacitura, non differisce in nulla da qualsiasi altro punto, da qualsiasi altra giacitura, è in netto contrasto con la multiforme varietà della natura, la quale è cangiamento, rinnovamento

costante, processo incessante: essa mai si ripete! Ma lo spazio del mondo classico è monotono, uniforme. La sua densità di materia o dei campi di energia è quasi nulla, per cui lo spazio si presenta nella sua sconfinata monotonia e uniformità. Eddington si ribella a questo fatto non « naturale », quando scrive (29, *a*; 131): « Lo spazio fisico non può essere privo di caratteristiche », e su ciò torneremo nel cap. V.

Come attribuire, dunque, allo spazio cosmico una uniformità ignorata dalla natura?

5) *Favolosa durata dei raggi luminosi* (*anni-luce*). — Questo sconfinato spazio uniforme è calcolato dagli astronomi con una unità di misura, detta *anno-luce*, pari a circa 10 milioni di milioni di chilometri, la distanza, cioè, percorsa, in un anno, dalla luce, con una velocità pari a 300.000 chilometri al secondo. La luce della grande Nebulosa di Andromeda impiega due milioni di anni per giungere fino a noi, quella delle Galassie più distanti due miliardi di anni (36 bis, *a*; 3). La frequenza della luce visibile si calcola fra 400 e 750 bilioni di oscillazioni al secondo, in corrispondenza delle lunghezze d'onda, 0,4 e 0,7 micron, relative, rispettivamente, al violetto e al rosso (1 micron = mm. 10^{-3}). Se la luce ci arriva da una stella lontana, durante parecchi anni essa non è più sulla stella e non è ancora sulla Terra. Ci giungerebbe così la luce di stelle che, a causa di eventuali giganteschi cataclismi siderei, da milioni di anni forse non esistono più.

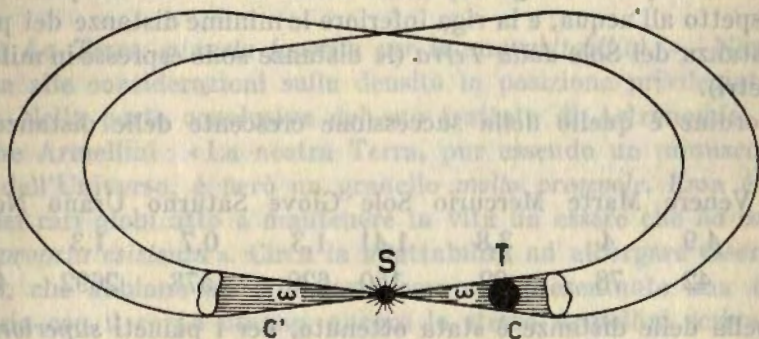
La velocità della luce di 300.000 km. al secondo è un fatto sperimentalmente provato; non altrettanto può dirsi della *durata* della luce. Non si conosce un esperimento (sarebbe, forse, possibile mediante specchi riflettenti?) che dimostri che la luce può avere una durata di minuti o di ore. Il fisico-matematico, che calcola durate di percorsi della luce dell'ordine di milioni di milioni di anni, non si fonda sull'esperienza. Ammette siffatte favolose durate perchè conseguono necessariamente dalle premesse da cui è partito. Una interpretazione dei fatti della natura, che non implicasse necessariamente tali mostruose durate di raggi luminosi sarebbe, forse, preferibile.

6) *Dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole.* — L'energia emessa dal Sole assurge a cifre sbalorditive. Mediante il piroeliometro è stata calcolata la quantità di energia (*costante solare*) che arriva in un minuto primo sopra un cm² di area posta ad angolo retto rispetto ai raggi solari e appena esternamente alla atmosfera terrestre: si è ottenuta una quantità di calore equivalente a 1,937 calorie-grammi. Il Sole

emette, ogni secondo, una energia di oltre 100 miliardi di miliardi di Kwh. Il flusso di energia, che il Sole irradia in un anno, ammonta a $2{,}88 \cdot 10^{33}$ calorie-grammi. « Vicino al centro del Sole, scrive Deutsch (27; 182), ad una temperatura di 20 milioni di gradi centigradi, i nuclei atomici si urtano con tale violenza da trasformarsi gli uni negli altri. I più importanti di questi processi producono nuclei di elio, partendo da quelli dell'idrogeno. Essi sono il cosidetto ciclo del carbonio e la reazione protone-protone. Per mezzo di queste reazioni termonucleari, 564 milioni di tonnellate di idrogeno sono trasformate, ogni secondo, in 560 milioni di tonnellate di elio. La maggior parte dei quattro milioni di tonnellate, che così si disperde ogni secondo, viene convertita in energia radiante, e questa fluisce, al di fuori della superficie incandescente del Sole, al ritmo di mezzo milione di miliardi di miliardi di cavalli-vapore ». Di questa colossale quantità di energia la Terra riceve una esigua frazione, pari a meno di due miliardesimi ; i pianeti, nel loro complesso, ricevono poche decine di miliardesimi. « Dove migra, scrive Lämmel (49 ; 104), la energia irradiata dal Sole ? Soltanto una frazione piccolissima giunge sulla Terra e sugli altri pianeti. L'energia... si sprofonda realmente nel nulla infinito e irraggiungibile ? Siamo inclinati a rifiutare questa concezione dello sprofondamento nel nulla. Anche qui ci guida l'idea della conservazione dell'energia. Piuttosto ci decidiamo a dichiarare non rettilineo il corso dei raggi luminosi, che sono le linee di conduzione delle masse irradiate. Con ciò il mondo verrebbe ad essere una scena limitata degli avvenimenti ».

A proposito del problema della fonte dell'energia solare e del suo eventuale rifornimento, Armellini, riferendosi alla Teoria della Relatività (9, *b* ; 304), scrive (9, *a* ; II ; 159) : « Se noi supponiamo vera la geometria ellittica, ogni raggio di luce, partito dal Sole, torna sul Sole stesso, a meno che non sia arrestato, nel suo cammino, da qualche corpo opaco. Ammessa dunque la geometria ellittica, l'energia irradiata dal Sole, o dalle Stelle, verrebbe loro restituita automaticamente e sarebbe quindi ben facile risolvere il problema che ci occupa. Questa soluzione, come si vede, sembra, a prima vista, veramente seducente ; v'è però una difficoltà che le toglie, senz'altro, ogni valore.

Come si vede nella figura, S invia su un emisfero di T il flusso di luce contenuto nel cono C, mentre manderà sopra l'emisfero opposto il flusso di luce contenuto nel cono C'. I due coni hanno identica apertura ω, quindi i due emisferi terrestri riceveranno la stessa quantità di luce da S, e pertanto la notte dovrebbe essere luminosa come il giorno ». Armellini conclude asserendo che il Sole non ricupera l'ener-

gia irradiata e che pertanto «non ci resta che un'unica via per spiegare l'origine dell'irradiazione stellare: la teoria della trasformazione della materia in energia». Ma, anche risolvendo mediante tale trasformazione il problema dell'origine dell'irradiazione del Sole, resta il fatto che la quasi totalità della sua energia va perduta, in contrasto con quella

che Maxwell, a proposito del principio della minima azione, chiamava «grande legge della parsimonia della natura», per cui ogni attività, entro un sistema, viene realizzata con il minor dispendio possibile di energia. E quanto abbiamo detto per il Sole, dobbiamo ripetere per le stelle, per l'enorme perdita delle energie irradiate da bilioni di Stelle-Soli. Nell'attuale concezione del mondo non v'è dubbio che tali colossali perdite di energie costituiscono una netta violazione del principio di economia cosmica e di conservazione della energia.

7) *La Terra, il più denso dei corpi del sistema solare.* — Nel cap. XIII, Parte I, abbiamo visto come si ricavano le masse, i volumi e, quindi, le densità dei pianeti; abbiamo rilevato altresì come Armellini sottolinei il fatto che (come risulta dai calcoli), *nel sistema solare il corpo più denso è la Terra*. Così scrive Armellini (9, *b*; 203): «*Il pianeta più denso* (esclusione fatta per Plutone, il cui diametro non è ancora ben determinato) *è la Terra*». Calcoli approssimativi danno anche per Plutone una densità inferiore a quella della Terra (95; 105).

Si dicono *pianeti superiori* quelli che distano dal Sole più della Terra ed hanno, quindi, un'orbita esterna a quella terrestre. Essi sono: Marte, Giove, Saturno, Urano e Plutone.

Si dicono *pianeti inferiori* quelli che distano dal Sole meno della Terra ed hanno quindi un'orbita interna a quella terrestre. Essi sono: Mercurio e Venere.

Si dicono *pianeti interni* quelli che stanno al di qua della zona degli asteroidi. Essi sono : Mercurio, Venere, Terra e Marte. Marte, quindi, è superiore e interno. Distingueremo ora così i pianeti: 1) Il gruppo di pianeti superiori, al di là della zona degli asteroidi, che chiameremo *esterni* ; 2) Il gruppo dei pianeti *interni*. Consideriamo ora la seguente tabella, nella quale la riga superiore indica le densità dei pianeti e del Sole rispetto all'acqua, e la riga inferiore le minime distanze dei pianeti e la distanza del Sole *dalla Terra* (le distanze sono espresse in milioni di chilometri).

L'ordine è quello della successione crescente delle distanze *dalla Terra*.

Terra	Venere	Marte	Mercurio	Sole	Giove	Saturno	Urano	Nettuno
5,5	4,9	4	3,8	1,41	1,3	0,7	1,3	1,6
0	42	78	92	150	629	1578	2692	4351

La tabella delle distanze è stata ottenuta, per i pianeti *superiori*, sottraendo dalla loro distanza media dal Sole la distanza Terra-Sole ; per i pianeti *inferiori* sottraendo dalla distanza Terra-Sole la loro distanza media dal Sole. Come valori delle distanze medie dal Sole abbiamo preso quelli di Baker (10 ; 105). Per la densità abbiamo assunto quelle di Armellini (9, *b* ; 309).

Questa tabella ci mostra che, alla successione crescente delle distanze (Sole compreso) corrisponde una successione decrescente delle densità (con eccezione, per lieve differenza, di Saturno e, per lievissima differenza, di Nettuno). Nel sistema solare, dunque, il pianeta più denso è la Terra. I pianeti *esterni* e il Sole hanno una densità *molto minore* dei pianeti *interni*. I corpi celesti del sistema solare, quanto più lontani sono dalla Terra, tanto minore densità hanno. Colpisce il fatto che la Terra ha una situazione, in questo campo, particolarissima, privilegiata. Una posizione di questo genere ce la saremmo aspettata semmai per il Sole ; eppure no : è la Terra l'astro del sistema solare più denso. E a questo si aggiunge, come or ora abbiam detto, una certa relazione fra distanze e densità : al crescere della distanza dalla Terra decresce la densità dell'astro (con lievi eccezioni). Anche questa circostanza colloca la Terra in una posizione singolare rispetto agli altri pianeti e al Sole stesso. È una « strana combinazione » direbbe Eddington. Nella Teoria classica la Terra è un pianeta come tutti gli altri, al punto che, estrapolando dal terreno scientifico, qualcuno, come Castelfranchi (20; 717), ha rilevato l'inconsistenza de « l'orgoglio geocentrico negli abitanti del nostro minuscolo pianeta ». Di privilegio, dunque, nemmeno

l'ombra. Il fatto « strano », da me posto in rilievo e, in parte, già sottolineato da Armellini e da altri, non trova giustificazione alcuna nella attuale concezione del mondo, nella quale tale fatto si presenta del tutto accidentale. Una teoria, nella quale anche questo fatto non si discostasse da una linea razionale, purchè vi fosse ovviamente accordo con i fatti osservati, sarebbe, senza dubbio, degna di considerazione.

8) *La Terra, pianeta favorito per la sua abitabilità.* — Non è solo dovuta alle considerazioni sulla densità la posizione privilegiata della Terra. Nella parte conclusiva del suo trattato di Astronomia, così si esprime Armellini : « La nostra Terra, pur essendo un minuscolo granello dell'Universo, è però un granello *molto pregevole.* Essa è infatti uno dei rari globi atto a mantenere in vita un essere che *ha coscienza della propria esistenza* ». Circa la adattabilità ad albergare esseri intelligenti, che abbiano un organismo corporeo presentante una qualche analogia con il corpo umano, ancora lo stesso Armellini scrive (9, *b* ; 3) : « La Terra, per quanto riguarda l'anzidetta adattabilità, non ostante la sua relativa piccolezza, può ben dirsi un globo *particolarmente favorito* ». Circa la possibilità di vita sui pianeti, Vercelli annota (89 ; 45) : « La Terra appare quale unico pianeta che contenga ossigeno nella propria atmosfera ». E quì possiamo domandarci, come abbiam fatto per la densità : a che tale privilegio ? Perchè il pianeta Terra, che nel sistema copernicano non ha titoli particolari che lo debbano fare spiccare fra gli altri, risulta invece « favorito » ?

9) *Le stagioni e le cause delle differenze di temperatura.* — Ricordiamo che la Terra, quando si trova al perielio, è più prossima al Sole di circa 5 milioni di chilometri di quando si trova all'afelio. Infatti, essendo c l'ascissa del fuoco ed a il semiasse maggiore dell'orbita ellittica, si ha per l'eccentricità la relazione $c = ea$, da cui, essendo $a =$ $=$ km. 149.600.000 ed $e = 0{,}0168$, si ricava per c la lunghezza di 2.500.000 chilometri circa. Quando la Terra si trova al perielio, nell'emisfero boreale si ha l'inverno, cioè, quando la Terra è più prossima al Sole, nell'emisfero boreale si ha la stagione più fredda. Ciò si spiega con il fatto che, data la esiguità, rispetto alla distanza Terra-Sole, della predetta differenza (5 milioni di chilometri rispetto a quasi 150), prevale nettamente la *legge del coseno,* per la quale la radiazione incidente decresce con il crescere della obliquità dei raggi sull'unità di superficie colpita (su questa legge torneremo fra un momento). Vi è poi ancora una circostanza da notare. Ci si aspetterebbe che l'inverno, nell'emi-

sfero nord (in perielio), fosse meno freddo dell'inverno nell'emisfero sud (in afelio) e che l'estate fosse più calda nell'emisfero sud che nell'emisfero nord: accade invece esattamente l'opposto. Ma anche questo si spiega: l'effetto della continentalità dell'emisfero nord prevale su quello della radiazione e, in definitiva, quindi, la media termica invernale è minore nell'emisfero settentrionale che in quello meridionale. Analogamente si dica per l'estate, a causa dell'azione degli oceani maggiormente estesi nell'emisfero australe che in quello borale.

Come si spiegano, dunque, le differenze di temperatura nelle varie stagioni? Le cause principali sono queste: nel semestre estivo, in ciascun emisfero, il giorno è più lungo della notte e la Terra riceve più calore di quanto ne perda (viceversa accade nel semestre invernale); la ragione fondamentale, tuttavia, è legata alla 1ª legge del coseno di Lambert già accennata, generalizzazione della legge dell'inversa del quadrato delle distanze. Un cono di raggi luminosi uscenti da una sorgente (considerata) puntiforme individua un fascio di luce. Dicesi *quantità di luce* w (*quantità di energia raggiante*) l'energia che attraversa una data sezione del fascio. Dicesi flusso Φ (*flusso di energia raggiante*) la quantità di luce convogliata dal fascio per unità di tempo t. Si ha quindi

$$\Phi = \frac{d\,w}{d\,t}; \tag{121}$$

Il flusso riferito all'unità di superficie è la *densità superficiale del flusso luminoso* (*del flusso di energia raggiante*): si chiama *illuminamento o irradiamento* della superficie $d\,S$ e si scrive

$$E = \frac{d\,\Phi}{d\,S} \tag{122}$$

Se $d\,S_0$ è una sezione *normale* del cono, $E_0 = \dfrac{d\,\Phi}{d\,S_0}$ si assume come misura dell'*intensità del fascio di luce* (*intensità del fascio di radiazione elettromagnetica o di energia raggiante*) in corrispondenza della sezione $d\,S_0$. Per una sezione obliqua $d\,S$ si ha:

$$E = \frac{d\,\Phi}{d\,S} = \frac{d\,\Phi}{d\,S_0} \cos\alpha = E_0 \cos\alpha \tag{122)'}$$

dove α è l'angolo che il fascio forma con la normale alla superficie. La (122) può leggersi in due modi: 1) l'illuminamento è proporzionale a $\cos\alpha$ (1ª legge del coseno); 2) l'illuminamento è proporzionale alla intensità del fascio, essendo $\cos\alpha$ *il coefficiente di proporzionalità*.

Nella figura osserviamo che, a misura che il fascio luminoso accresce la sua inclinazione, decresce l'illuminamento di *AB*. È questa, in termini precisi, la legge che spiega la differenza di temperatura nelle varie stagioni. Più si procede dall'equatore verso i poli e *meno calore* danno i raggi solari, perchè, cadendo sempre più *obliqui*, la loro azione si diffonde sopra una superficie maggiore. All'equatore, invece, condensandosi in una superficie meno estesa, l'azione dei raggi solari, che qui sono *perpendicolari*, è più viva e quindi il calore è più intenso. Noi, tuttavia, considereremo più da vicino tale fenomeno. Per rendercene meglio conto, costruiamo un modello, che riproduce la disposizione del Sole e dei pianeti, analogamente a quanto ha fatto Fred Hoyle (42, *c*; 22). Faremo il Sole come una sfera di m. 1,4 di diametro, operando così una riduzione di scala di circa un miliardo. Quanto disteranno i pianeti dalla nostra sfera? Non qualche metro o due o tre decine di metri, come potrebbero credere molti, raffigurandosi il sistema solare, ma molto di più. Mercurio è lontano 60 metri, Venere 110, la Terra 150, Marte 230, Giove 780, Saturno 1730, Urano 2850, Nettuno 4500, Plutone 6000. Poichè il diametro del Sole è pari a 109 volte il diametro della Terra, dividendo m. 1,4 per 109, otterremo alla stessa scala il diametro terrestre, ossia poco meno di un centimetro e mezzo. Immaginiamo poi che la sfera di m. 1,4 di diametro irradi una grande quantità di energia. Ora ci domandiamo: a una distanza di 150 metri la sferetta di cm. 1,5 di diametro sarà fortemente riscaldata fino a raggiungere elevate temperature nella parte anteriore (e posteriore), mentre le zone polari, per cui passa il circolo di illuminazione, rimarranno a temperature molto al di sotto dello zero, oppure la sferetta verrà tutta uniformemente riscaldata? Basta pensare a questa concreta esperienza per tendere decisamente verso questa seconda ipotesi. Nel sistema solare, invece, si verificano rilevantissime differenze di temperature fra le zone polari e quella equatoriale. Ciò non può non lasciarci alquanto perplessi. La Teoria classica spiega tali differenze essenzialmente con la legge del coseno, la cui validità è indubbia, ma, considerando il semplice esperimento proposto, non appare sufficiente. Una Teoria che, oltre alla ragione anzidetta,

ne fornisce un'altra, forse anche più valida, per spiegare quelle cospicue differenze di temperatura, ci lascerebbe più soddisfatti.

10) *Luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna.* — È stato constatato che la luminosità del cielo notturno, senza nubi e senza Luna, è dovuto solo in minima parte alla luce irradiata dalle stelle; si è calcolato che tale luminosità è 5 volte maggiore di quella puramente stellare. Dopo molti studi, si è concluso che essa proviene, in massima parte, dai gas dell'alta atmosfera, come se ivi esistesse una specie di aurora permanente: si tratta di emissione di luce dai possibili gas esistenti nell'alta atmosfera in condizioni di pressioni assai basse e di incerte temperature. Una parte (15 %) della luminosità notturna è attribuita alla *luce zodiacale*, che ha il carattere di tenue luce solare riflessa da sciami di particelle, la cui natura e la cui posizione sono ancora molto discusse (89; 39). Lo spettro della luce zodiacale è simile allo spettro solare; si pensa che il fenomeno sia dovuto a riflessione della luce solare da parte di nubi di materiali situati molto lontano, fuori dell'orbita terrestre. Simile ipotesi sta alla base della teoria detta *planetaria*; la nube riflettente ha forma lenticolare e ruota attorno al Sole, sul piano dell'eclittica. Ignota è l'origine di simili nubi. La teoria planetaria spiega la maggior parte delle caratteristiche della luce zodiacale, ma non la genesi delle nubi riflettenti. Il problema è ancora aperto (89; 470).

Abbiamo riassunto dalle pagine di Vercelli la descrizione del fenomeno e, quanto alle sue cause, la sua assai incerta soluzione: si tratta di un altro punto debole della Teoria classica.

11) *Analogia fra l'atomo e il sistema planetario.* — Ripetiamo qui le parole di Planck, citate a proposito dello spazio cosmico uniforme (73; 201): « Secondo la fertilissima Teoria di Niels Bohr gli elettroni di un atomo si muovono attorno al nucleo, secondo leggi assai simili a quelle secondo cui i pianeti si muovono attorno al Sole. Al posto della forza di gravitazione subentra qui l'attrazione delle cariche opposte del nucleo e degli elettroni. Ma c'è la singolare differenza che gli elettroni possono circolare soltanto su orbite ben determinate che differiscono l'una dall'altra in modo discreto, mentre nel caso dei pianeti nessun'orbita sembra preferita rispetto ad un'altra ».

Senza entrare in merito ai nuovi sviluppi del concetto di elettrone, ecc., possiamo tradurre le parole di Planck così: Vi è una *singolare differenza* fra lo spazio astronomico e quello atomico, perchè il primo è pra-

ticamente euclideo, mentre il secondo non lo è. Una Teoria che vedesse muovere i pianeti, in uno spazio non euclideo, eliminerebbe la « singolare differenza » e andrebbe più d'accordo con il carattere non uniforme della natura : vedremmo confermata l'analogia fra l'atomo e il sistema planetario, analogia insufficientemente giustificata dall'attuale concezione del mondo.

12) *Il magnetismo terrestre e la sua origine.* — « Non si sa bene finora come spiegare l'origine di quel campo magnetico che avvolge la superficie terrestre » scrive il Vice Direttore dell'Osservatorio Astronomico di Brera, Prof. Alberto Masani (articolo « La Luna senza campo magnetico », giornale « L'Unità », 22 settembre 1959).

L'ipotesi di una potente calamita situata nell'interno della Terra risulta inaccettabile : data la densità centrale calcolata in 11,5 volte circa quella dell'acqua e la temperatura centrale aggirantesi sui 5000 gradi, è da escludersi che la regione nucleare abbia le proprietà di un solido, mentre invece le si devono attribuire quelle di un liquido. Se si pensa poi che detto campo magnetico non è costante nel tempo, rimanendo costante per periodi di circa 25.000 anni, mentre fra un periodo e l'altro cambia rapidamente (in 5000 anni circa) di polarità (il polo nord magnetico della bussola diventa sud e viceversa), allora, con l'ipotesi della calamita, tale fenomeno è assolutamente inspiegabile. Si sono avanzate quindi altre ipotesi, due principalmente, che si rifanno direttamente alla teoria generale del magnetismo, che collega questo fenomeno al movimento di cariche elettriche. « La difficoltà di queste teorie, annota ancora Masani, sta nel cercare la causa di tali correnti elettriche ». È nell'individuazione di tale causa che le anzidette due ipotesi si differenziano. La prima, detta *termoelettrica,* dice che quando due materiali di proprietà elettriche diverse sono a contatto in due punti, a differente temperatura, vengono percorsi da una corrente elettrica, la cui intensità dipende dalla differenza stessa delle due temperature. Nel problema in questione i due materiali sarebbero costituiti dal nucleo liquido e dal materiale solido, che lo avvolge. « Una tale teoria, scrive Masani, è applicabile solo alla Terra, poichè nelle stelle non si ha materiale solido o liquido, ma solo gassoso ».

La seconda ipotesi, detta *della dinamo,* è più generale, e ricerca la causa delle correnti elettriche puntando l'attenzione sui moti convettivi, di cui il nucleo liquido terrestre dovrebbe essere sede. Un eventuale debolissimo campo magnetico preesistente potrebbe essere amplificato da tali correnti, proprio come accade in una dinamo qualsiasi.

Avvertiamo, tuttavia, l'incertezza di tali teorie. L'interno della Terra è ancora un enigma. Fritz Kahn scrive in proposito (45; 197, Vol. I): «La composizione del globo terrestre è ancora sconosciuta... anche l'origine del calore è sconosciuta.... Oggi il rapporto di figliolanza tra il Sole e la Terra è diventato molto discutibile... Tutto quello che è stato detto sulle temperature e sullo stato generale dell'interno della Terra è finora pura congettura ». Le due «spie» fondamentali, di cui disponiamo, le *meteoriti* e i *terremoti*, ci consentono, quindi, enunciare solo delle ipotesi. *Pura congettura*, scrive Kahn, tutto quanto diciamo circa l'interno della Terra. In particolare, quindi, è pura congettura quanto si è asserito circa la causa delle correnti elettriche, che darebbero origine al magnetismo terrestre. Una Teoria del mondo, che ci fornisse la fonte naturale di tali correnti avendo a fondamento lo spazio universale concepito come un campo capace di spiegare molteplici fenomeni, in particolare il magnetismo terrestre, consentirebbe eliminare un altro punto oscuro della concezione classica dell'Universo.

Costituiscono altri punti deboli della Teoria esosferica i *vertiginosi voli di astri colossali con densità quasi nulla* e qualche aspetto, connesso con la concezione classica, della *Teoria della deriva dei continenti* di Wegener.

Alla luce di un nuovo concetto del mondo riesamineremo nel capitolo XII ognuno di questi punti. Non ho preteso esaurire, tuttavia, tutti i punti deboli della Teoria copernicana e penso che altri fenomeni, come, ad es., le Aurore Boreali e la riflessione delle onde corte causata da una specie di specchio concavo com'è lo «strato Kennelly-Heaviside», troverebbero una spiegazione più soddisfacente nella costruzione cosmica basata sulle premesse che andremo esponendo. Con tali nuove premesse, infine, riguardanti la natura dello spazio, ci sarà consentita una diversa interpretazione delle *estrapolazioni*, che abbiamo esaminato nel cap. XIII della Parte I, consistenti nell'applicazione allo spazio cosmico (non ammessa, peraltro, senza serie riserve da parte di eminenti scienziati) di leggi come quella della propagazione rettilinea della luce, dell'attrazione verificata da Cavendish, del quadrato delle distanze, di leggi come quella di Stefan e Boltzmann, di relazioni come quella esistente fra luminosità e tipo spettrale, di effetto come quello di Doppler. Vedremo quale interpretazione, forse più attendibile, potremo dare ai valori delle distanze, dei volumi, delle densità, delle velocità dei corpi celesti, ai valori delle durate di fenomeni come quello della luce, che, mediante dette estrapolazioni, ci ha fornito l'Astronomia classica.

CAPITOLO II.

La luce.

Cos'è la luce ? – Le leggi dell'ottica geometrica – Il cervello e le sensazioni luminose – Perchè vediamo diritti gli oggetti che la retina percepisce capovolti – Carlson: « L'occhio prolunga mentalmente i raggi » – Le « prove » su cui si fonda l'ipotesi della propagazione « rettilinea » della luce – Perchè può ritenersi ugualmente valida l'ipotesi di una propagazione curvilinea – Natura elettromagnetica delle radiazioni hertziane, infrarosse, luminose, ultraviolette, dei raggi X, dei raggi γ – Le teorie della luce; la teoria corpuscolare o balistica, la teoria elastica o ondulatoria, la teoria elettromagnetica – Fresnel, Faraday, Maxwell e Hertz – La Teoria dei Quanti – L'etere.

" Che un raggio di luce viaggi in linea retta è un'ipotesi ".

BRIDGMAN

I punti deboli dell'attuale concezione del mondo, rilevati nel capitolo precedente, ci suggeriscono di esaminare attentamente i punti di partenza, da cui necessariamente quelli conseguono. La classica concezione del mondo è, senza dubbio, la più valida che il pensiero scientifico potesse formulare in base alle ipotesi, finora ammesse, sulla natura dello spazio. La costruzione di Newton e la nuova interpretazione di Einstein sono monumenti di pensiero e di razionalità che ci lasciano ammirati. La precisione con cui gli astronomi prevedono molteplici fenomeni celesti, la validità della legge newtoniana, che ha consentito al francese Leverrier e all'inglese Adams di scoprire, con il calcolo, il pianeta Nettuno (scoperto poi effettivamente con il telescopio, in base a quei calcoli, da Galle, a Berlino), la messa in orbita dei recentissimi satelliti artificiali, il lancio di razzi spaziali sono successi indubbi, che confermano la vitalità delle teorie che li hanno resi possibili. Esamineremo se una modificazione delle premesse, su cui poggia la Teoria classica, non solo possa, ovviamente, mantenere in piedi tutto ciò che di valido, di « vero », contiene tale teoria, ma sia in grado, inoltre, di colmare diverse lacune, che di quelle premesse sono la conseguenza.

Qual'è il punto di partenza per l'indagine del cielo? L'abbiamo visto nella parte prima: allo spazio astronomico, spazio di tipo ottico, sono stati attribuiti i caratteri dello spazio ordinario, e ciò perchè, precisa Sandage (81; 113), « un astronomo non può eseguire esperienze su quello che è l'oggetto dei suoi studi, e neppure può esaminarlo direttamente. Le sue fonti di osservazione sono i raggi di luce che provengono dallo spazio esterno ». Gli esperimenti effettuati con i razzi spaziali, come vedremo nel cap. XV, non invalidano, in alcun modo le asseverazioni di Sandage. Il punto di partenza è stato, finora, quello di attribuire al raggio luminoso, che attraversa gli spazi celesti, i caratteri di rettilineità, che gli si attribuiscono nello spazio ordinario, *ossia è quello di considerare euclideo lo spazio astronomico.* Occorre, dunque, soffermarci sul fatto « luce ». Cos'è la luce? Come si propaga? Asserire che il percorso dei raggi luminosi è rettilineo è un fatto o un'ipotesi? Che valore hanno gli esperimenti effettuati per rispondere all'ultima domanda? Per dare una risposta a questi interrogativi esaminiamo il problema « luce », facendo le distinzioni, su cui ci siamo soffermati nei capitoli III, IV, V della parte prima; distingueremo, cioè: 1) *l'ottica fisio-psicologica*, 2) *l'ottica fisica*, 3) *l'ottica geometrica.*

1) *L'ottica fisio-psicologica* o studio dello spazio ottico fisio-psicologico comprende lo studio dell'occhio, nella sua struttura anatomica, nelle sue funzioni, nelle sue alterazioni, ecc., e lo studio dell'interpretazione delle sensazioni visive.

2) *L'ottica fisica* o studio dello spazio ottico fisico comprende lo studio dei fenomeni luminosi obiettivati mediante associazioni e confronti delle diverse percezioni. L'ottica fisica si suole dividere in due capitoli: « *ottica geometrica* » (impropriamente detta) e *ottica fisica* (propriamente detta). L'« ottica geometrica » comprende le leggi che governano quei fenomeni ottici, nei quali non interviene la natura (ondulatoria, elettromagnetica) della luce, nè la sua velocità di propagazione, e cioè:

1) propagazione lungo raggi rettilinei;
2) indipendenza di ciascun raggio dagli altri;
3) le due leggi della riflessione;
4) le due leggi della rifrazione.

Ho scritto « impropriamente » perchè dette leggi sono *fisiche* e non « geometriche »; per descriverle si usa il linguaggio astratto della geometria, applicando, anzi, ad esse enti geometrici astratti, come punto,

retta, angolo, che i fenomeni concreti della natura solo suggeriscono (analogamente, nel linguaggio ordinario, diciamo che una piazza è rettangolare, una strada è rettilinea, ecc.). È comodo usare il linguaggio geometrico, ma chiamare « geometriche » delle leggi fisiche, senz'altra avvertenza, mi pare inesatto. L'*ottica fisica* studia, invece, i fenomeni di interferenza, di diffrazione, di polarizzazione, dove interviene la natura ondulatoria della luce, gli effetti ottici del movimento, come quello di Doppler, e le diverse teorie intese via via a spiegare la natura della luce, come la teoria corpuscolare, l'ondulatoria, l'elettromagnetica.

3) *L'ottica geometrica* (propriamente detta) o studio dello spazio ottico geometrico comprende lo studio di certi enti astratti e di certe relazioni fra questi enti, suggeriti dalle *radiazioni* o *raggi luminosi* (e dai relativi fenomeni ed esperienze), percepiti dall'occhio (ottica fisio-psicologica) e obiettivati (ottica fisica).

Ho voluto insistere su queste distinzioni, che Veronese riteneva necessarie, rilevando che non erano state osservate « nemmeno da grandi matematici come Helmholtz e Poincaré ». Per comodità e praticità, tuttavia, e per attenermi al linguaggio generalmente adottato, per « ottica geometrica » intenderò sia il fenomeno fisico che la relazione geometrica che lo descrive : le considerazioni fatte servano a non ingenerare confusione concettuale.

Considereremo note le nozioni fondamentali riguardanti l'occhio e ci indugeremo sulla interpretazione delle sensazioni visive.

« Le sensazioni luminose, scrive Persico (71, *c* ; 263), trasmesse al cervello dalle diverse fibre del nervo ottico, ci permettono di rappresentarci gli oggetti nella loro vera forma e posizione nello spazio, ma il procedimento psichico, con il quale questo si ottiene, cioè l'interpretazione di quelle sensazioni e la loro coordinazione all'esistenza di un dato oggetto in una certa posizione dello spazio, è molto complicato e non si acquista che con l'abitudine e l'esperienza fatta nei primi mesi di vita. Questa educazione del senso è resa naturalmente più facile e rapida dall'ereditarietà. Il processo con cui si forma questa educazione ha potuto essere studiato in quei casi, in cui dei ciechi nati hanno acquistato la vista in seguito a un'operazione in età sufficiente per poter descrivere le proprie impressioni, avendo già una adeguata conoscenza del mondo esterno, acquistata sopratutto con le sensazioni tattili e muscolari. Ecco alcuni casi.

Il paziente, nei primi giorni, è assolutamente incapace di localizzare gli oggetti, e si muove presso a poco come quando era cieco. Se

gli si mostra un oggetto, egli non può dire se è vicino o lontano, se a destra o a sinistra, e, se deve allungare la mano per prenderlo, va a tentoni e sbaglia. Caratteristica è poi l'osservazione seguente. Ad un operato, che sapeva da molto tempo distinguere, al tatto, un oggetto tondo da uno quadrato, furono mostrati, due giorni dopo l'operazione, due pezzi di cartone, uno rotondo e uno quadrato, senza permettergli di toccarli; egli non seppe dire quale avesse una forma e quale l'altra. Dopo averli palpati, e aver ripetuto l'esperienza in due o tre casi diversi, il soggetto divenne capace di riconoscere un tondo da un quadrato senza l'aiuto del tatto.

Questa esperienza caratteristica dimostra che la forma dell'immagine retinica non basta a suggerire la forma che si deve attribuire all'oggetto che l'ha provocata. È necessario *imparare* che a quella certa sensazione retinica corrisponde una determinata forma dell'oggetto. Altrettanto dicasi per il giudizio di posizione e di grandezza. In questi giudizi, inoltre, interviene non solo la sensazione visiva, ma anche quella muscolare, che ci permette di renderci conto della direzione nella quale sono diretti gli occhi, del grado di convergenza di essi e dello sforzo di accomodazione. Il bambino, nei primi mesi di vita, tende le mani per prendere gli oggetti che vede, ma i suoi movimenti sono incoerenti e spesso crede di poter toccare oggetti molto lontani da lui. In seguito egli apprende gradatamente, per es., che a un certo determinato grado di convergenza degli occhi, unito a un determinato sforzo di accomodazione, corrisponde un oggetto ad una determinata distanza, e a quelle certe sensazioni visive e muscolari impara ad associare certi movimenti del braccio, che portano la mano nel punto fissato dagli occhi.

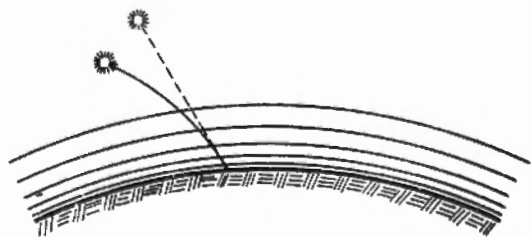
La rappresentazione del mondo esterno, che noi, per la lunga abitudine, crediamo di ricavare direttamente e immediatamente dalle sensazioni visive, è in realtà il risultato di un processo complicatissimo, nel quale hanno grande importanza le associazioni fra le sensazioni visive e quelle tattili e muscolari. "Le sensazioni visive, dice Helmholtz, sono dei segni che l'esperienza ci ha insegnato a interpretare".

Da questa concezione discende facilmente la risposta ad una vecchia questione: *perchè noi vediamo gli oggetti diritti mentre l'immagine sulla retina è capovolta?* La cosa si comprende, se si pensa che il cervello non ha alcuna percezione della posizione effettiva (rispetto al capo) del punto della retina impressionato. Si pensi, per es., all'immagine di un uomo in piedi e supponiamo che l'immagine della sua testa si formi in un punto T della retina, quella dei piedi in un punto P: noi possiamo dire che l'uomo è in posizione normale perchè riconosciamo che il punto

T occupa, rispetto a *P*, quella stessa posizione che siamo abituati a constatare in tutti i casi analoghi, e che distingue, per es., i punti della retina dove si forma l'immagine del cielo, da quelli dove si forma l'immagine del terreno. Noi traduciamo questa relazione dicendo che gli oggetti, la cui immagine si forma in *T*, sono collocati più in alto di quelli la cui immagine si forma in *P* : ma questo noi l'abbiamo appreso con l'esperienza, associando le sensazioni tattili alle visive; la posizione effettiva sulla retina dei punti *T* e *P* non ha alcun interesse, e non ne abbiamo, del resto, nessuna percezione diretta. Nello stesso modo si comprende come noi possiamo attribuire agli oggetti le loro vere dimensioni, sebbene le immagini retiniche siano tanto più piccole degli oggetti stessi ».

A proposito della grande adattabilità del cervello, Carlson riferisce il seguente esperimento (19 ; 194) : « Uno psicologo americano si mise sul naso un paio di occhiali muniti di prisma d'inversione, occhiali che ora gli mostravano realmente un mondo " con la testa all'ingiù ", poichè disturbavano la cooperazione dei sensi, frutto di molti anni. Sulle prime il cervello rimase disorientato dello strano mondo che gli si presentava. Ogni passo, ogni gesto richiedeva un certo lavorio mentale, una certa riflessione. Ma, dopo qualche giorno, il cervello si era adattato, " invertito ", e il nostro americano non vedeva più nulla di straordinario nel mondo ; questo gli apparve " diritto " ! E se avesse portato simili occhiali sin dalla nascita, certamente non gli sarebbe mai venuta l'idea che il suo mondo avesse qualche cosa di straordinario. Ma, quando volle togliere di nuovo gli occhiali — ahi lui ! — chi ne descriverà lo stupore ? Doveva cominciare da capo a ri-imparare per alcuni giorni, doveva cadere e pestarsi, prima che il suo cervello si abituasse di nuovo all'assenza degli occhiali ».

« La nozione, scrive Persico (71, *c* ; 2), della propagazione *rettilinea* della luce attraverso lo spazio, nozione così comune da sembrare quasi intuitiva, ci proviene dalla esperienza quotidiana, la quale ci prova che, se sul segmento di retta congiungente l'occhio con un punto di un oggetto si interpone un corpo di quelli che si chiamano opachi, la vista di quel punto è impedita : da ciò la nozione primitiva di *raggio luminoso*, cioè di retta lungo la quale si propaga la luce ». L'esperienza ordinaria ci dice anche che, fissato con la vista un oggetto, se vogliamo raggiungerlo *nel più breve tempo*, dobbiamo dirigerci verso di esso, se il mezzo è omogeneo, percorrendo un tratto rettilineo. E se un bambino, guardandosi allo specchio, solleva il ditino con l'intenzione di raggiungere la propria immagine, ciò è dovuto al fatto che le sue esperienze gli hanno

sempre confermato che il tratto congiungente un oggetto con il suo occhio è rettilineo. Ora invece si trova di fronte ad un fatto completamente inatteso: il raggio luminoso percorre una spezzata! Dall'oggetto illuminato (per es. un bottone del vestito) parte un raggio luminoso, s'imbatte sulla superficie levigata dello specchio, *si riflette* e penetra nell'occhio. È la legge della riflessione della luce. « L'occhio, scrive Carlson (19 ; 191) si lascia ingannare volentieri, è di una ingenuità quasi infantile e giura sulla propagazione rettilinea della luce: *prolunga mentalmente i raggi* ». Dicono che Cristoforo Colombo donasse degli specchietti alle donne indigene del Nuovo Mondo, ricevendone in cambio pietre preziose e metalli pregiati. Ciò, invero, non dovrebbe farci sorridere. Quelle donne diedero mostra di intelligenza: quegli oggetti così ben levigati davano luogo a un fenomeno da loro ignorato, e che appariva loro, oltrechè sorprendente, assai utile per adornarsi e più interessante, forse, di quanto non lo fossero le stesse gemme preziose, di cui, peraltro, non conoscevano il vero valore. Sul processo psicologico dell'occhio *che prolunga mentalmente i raggi* si fonda, altresì, l'effetto d'ingrandimento delle immagini, prodotto da lenti convergenti, così come da tale processo ha origine il fatto che gli astri appaiono più elevati sull'orizzonte quando i raggi luminosi, per successive rifrazioni, seguono un cammino curvilineo. Il noto fenomeno del remo immerso nell'acqua, che, a causa della rifrazione, pur essendo intero ci appare spezzato, fu già oggetto di riflessione, nell'antichità, da parte di Aristotele. *Ogni oggetto o sorgente luminosa appare trovarsi nella direzione, con la quale i raggi luminosi, uscenti da detto oggetto o sorgente luminosa, penetrano nell'occhio, o nella camera oscura di una macchina fotografica.* Vedremo che questo fatto ha un'importanza enorme per le sue conseguenze: l'immagine che da millenni l'umanità si fa del mondo potrebbe essere assai diversa da quella reale.

Sulla propagazione rettilinea della luce, in un mezzo omogeneo, scrive Perucca (72, II ; 14): « L'ombra e la penombra date dagli oggetti opachi e le eclissi sono correntemente ricordate come fenomeni comprovanti la propagazione rettilinea della luce dalla sorgente verso lo schermo su cui si osservano le ombre. Più direttamente, un sottile fascio di luce solare (si dice anche: un " pennello di luce ") che, attraverso un foro

delle imposte, penetra da una finestra nell'aria polverosa o fumosa di una stanza buia, vi segna visibilmente il suo tragitto rettilineo. Se il pennello di luce ha sezione s abbastanza sottile (per es. 0,5 cm²), si dice di aver così sensibilmente realizzato un *raggio luminoso* e, con una estrapolazione fino al limite $s = 0$, si conclude, dall'esperienza precedente, che la luce si propaga per "raggi luminosi rettilinei». Più avanti, a pag. 21, Perucca afferma che le esperienze accennate, su cui si basa la definizione geometrica di raggio luminoso, sono «grossolane», aggiungendo che tale definizione voleva fare del raggio luminoso « un concetto troppo concreto ». Rilevo una scarsa distinzione tra fenomeno fisico e geometria. Il " raggio luminoso " è concreto perchè di natura fisica. La retta rappresentante il raggio e la sua propagazione rettilinea è, come ogni ente geometrico, astratta. La definizione della propagazione rettilinea della luce, basata sulle considerazioni delle superficie d'onda piane, di cui Perucca tratta più oltre (e noi ne parleremo fra un momento), non consente, d'altra parte, confusione alcuna tra geometria e fisica, nè costituisce o implica una esperienza probatoria più efficace di quelle prima esposte e giudicate grossolane.

Passiamo ad esaminare da vicino tali effettive esperienze intese a provare la propagazione rettilinea della luce, per renderci conto che, non solo sono «*grossolane*» come afferma Perucca, ma nettamente insufficienti per consentirci di discriminare e stabilire, come subito vedremo, quale delle due teorie è più conforme alla realtà, se quella della propagazione rettilinea o quella della propagazione curvilinea.

Osserviamo subito che le eclissi « provano » che la luce si propaga in linea retta solo a condizione che il fenomeno venga spiegato mediante l'allineamento *euclideo* della Terra, del Sole e della Luna. Se si potesse spiegare (e ciò lo studieremo più avanti) l'eclissi mediante un allineamento *non euclideo*, la luce percorrerebbe una geodetica non più coincidente con quella euclidea (la retta ordinaria). L'eclissi « prova » che la luce si propaga in linea retta in base all'ipotesi che i tre astri, durante il fenomeno, siano allineati in senso euclideo, cioè appartengano ad una retta euclidea. È un circolo vizioso!

In quanto ai brevi tragitti percorsi dalla luce (pennello di luce nella stanza, ombre di oggetti, ecc.), si tratta di « prove » valevoli solo entro un certo ordine di approssimazione. Tutti sappiamo che un arco di circonferenza di raggio sufficientemente grande (qualche migliaio di chilometri, per es.) lungo alcune decine di metri, ha una curvatura trascurabile : l'arco ci appare come un segmento rettilineo. Con facile calcolo si ricava che la flessione, per es., di un arco di circonferenza di raggio

pari a km. 3000, lungo 100 metri, è inferiore a 7 secondi di arco. La legge della propagazione rettilinea della luce è solo un'ipotesi. « Introduciamo l'ipotesi che un raggio di luce viaggi in linea retta », scrive Bridgman (16 ; 32). Persico, riferendosi alla legge in questione, asserisce che (71, *c* ; 89) « non è che approssimata, e perciò tutta l'ottica geometrica fornisce risultati che non sono rigorosamente esatti ».

Nei limiti degli errori di osservazione, in buon accordo con i fatti dell'esperienza ordinaria, possono ritenersi *egualmente valide*, per quanto riguarda la traiettoria percorsa da un raggio luminoso, sia la legge della propagazione rettilinea sia una legge di propagazione curvilinea.

Non sarà superfluo indugiarci un momento sulla natura della luce e su ciò che dobbiamo intendere per « raggio luminoso », cui abbiamo già più volte accennato.

I fenomeni di diffrazione, di interferenza e di polarizzazione (per i quali rinviamo ai trattati specializzati) sono fondamentali per chiarire la natura della luce ; questa poi, oltre all'effetto fisiologico, che chiamiamo sensazione visiva, produce effetti termici, chimici e di altra natura. Herschel scoprì che nella luce solare esistono radiazioni che non impressionano l'occhio, ma producono gli stessi effetti termici delle altre : si chiamarono *radiazioni infrarosse*. Lo spettro solare è, inoltre, prolungato, dalla parte del violetto, da radiazioni invisibili, come le infrarosse, ma tali da impressionare la lastra fotografica, e si dicono *radiazioni ultraviolette*. Proprietà analoghe alle radiazioni solari, a quelle infrarosse e a quelle ultraviolette, hanno i raggi X, i raggi γ e le radiazioni (o onde) *hertziane*, dette anche *elettriche*. Di tutte queste radiazioni, le hertziane sono le sole il cui meccanismo di emissione (scarica oscillatoria) è completamente noto, potendosi seguire il loro comportamento in tutti i particolari. La continuità con cui si ricollegano tra loro le radiazioni infrarosse, le luminose e le ultraviolette, e la analogia delle loro proprietà consentono formulare l'ipotesi che esse siano tipi diversi di una unica radiazione ; d'altro canto l'analogia di comportamento di tali radiazioni con i raggi X e γ e con le radiazioni hertziane, nonchè la comune velocità di propagazione, ci induce a supporre che anche queste abbiano natura uguale alle prime.

Esaminiamo brevemente ora con Persico (71, *c* ; 63) il comportamento delle radiazioni hertziane. « Un filo rettilineo percorso da corrente è circondato da un campo magnetico, le cui linee di forza sono cerchi aventi il filo per asse, e la cui intensità è data dalla formula di Biot e Savart

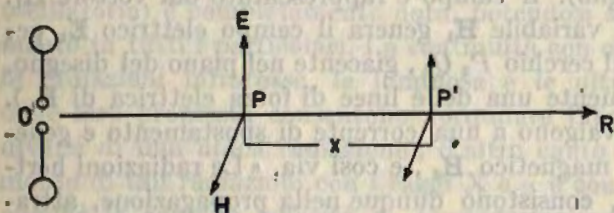
$$H = \frac{2}{c}\frac{i}{r} \qquad (123)$$

dove i è l'intensità della corrente in unità elettromagnetiche, e c un coefficiente caratteristico dei fenomeni elettromagnetici, determinabile sperimentalmente, ed eguale a $3 \cdot 10^{10}$ in unità C.G.S. Tutto ciò vale finchè la corrente si mantiene costante: se essa cambia, il campo magnetico segue i suoi cambiamenti con un certo ritardo, che è naturalmente maggiore nei punti più lontani del conduttore. Se, per es., la corrente venisse bruscamente interrotta, il campo magnetico non si annullerebbe subito dappertutto, ma prima nelle parti immediatamente vicine al filo e poi, a mano a mano, in quelle più lontane. In altre parole, le variazioni del campo si propagano da punto a punto con velocità finita (ma estremamente grande). Quando nell'oscillatore di Hertz, schematizzato in figura, avviene una scarica oscillatoria, la sua parte centrale è percorsa da una corrente elettrica alternata, variabile con legge sinusoidale. Il campo magnetico generato da questa corrente variabile sarà pur esso variabile, e le sue variazioni si propagano via via dai punti più vicini all'oscillatore a quelli più lontani». In figura, la elettricità passa da A a B, generando un campo magnetico, di cui una delle linee di forza è rappresentata dal cerchio P_1 Q_1 (pensato perpendicolare al piano del disegno). Il campo è rappresentato dal vettore $\mathbf{H}_1$. Ma il campo magnetico variabile $\mathbf{H}_1$ genera il campo elettrico $\mathbf{E}_1$ periodicamente variabile (il cerchio P_2 Q_2, giacente nel piano del disegno, rappresenta schematicamente una delle linee di forza elettrica di $\mathbf{E}_1$). Le variazioni di $\mathbf{E}_1$ equivalgono a una corrente di spostamento e genereranno un altro campo magnetico $\mathbf{H}_2$, e così via. «Le radiazioni hertziane, continua Persico, consistono dunque nella propagazione, attraverso lo spazio, di un campo magnetico e di un campo elettrico, ciascuno variabile periodicamente con il periodo dell'oscillatore, i quali campi si inducono l'un l'altro con il meccanismo schematicamente accennato. La velocità con cui avviene la propagazione non si può desumere con il ragionamento elementare, ma, precisando questo ragionamento con il sussidio analitico, si trova che questa velocità deve essere (nel vuoto) proprio uguale a quel coefficiente c, che come abbiamo visto, collega le intensitá dei campi magnetici ed elettrici indotti con le intensitá delle correnti che li inducono. La misura diretta della velocità delle

onde hertziane (e anche della luce) dà 300.000 km/sec., cioè, in unità C. G. S., $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec., in perfetto accordo con il valore del coefficiente c determinato con misure elettriche. È questa una delle più brillanti conferme sperimentali di questa teoria e della applicabilità di essa anche alle radiazioni luminose ».

In un qualunque punto, ad una certa distanza dall'oscillatore AB, vi saranno, quindi, un campo elettrico E e un campo magnetico H perpendicolari fra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione della radiazione, cioè *trasversali*. I due campi variano di intensità nel tempo con legge sinusoidale e con la stessa fase. Il modo di variare, nel tempo e nello spazio, lungo un raggio, di una qualsiasi delle grandezze caratteristiche di un fenomeno ondulatorio è espresso dall'equazione

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{124}$$

e una forma simile per H (con H_0 al posto di E_0). Nella (124) E_0 è l'ampiezza, T il periodo, x la distanza fra il punto P' (vedi figura) e un altro punto P, sullo stesso raggio, considerato a partire da un istante in cui $E = H = 0$, e v è la velocità di propagazione; quindi $\frac{x}{v}$ è il tempo impiegato dalla propagazione a passare da P a P'. La (124) dicesi *equazione del raggio*. Lungo ognuno dei raggi uscenti da O, in un dato istante, il campo elettrico e il campo magnetico, sempre *perpendicolari fra loro e perpendicolari al raggio*, variano da punto a punto secondo detta legge sinusoidale. Tutti i punti che distano egualmente da O, cioè tutti i punti di una sfera qualsiasi di centro O, si trovano simultaneamente nella medesima fase di oscillazione: tale superficie dicesi *superficie d'onda*. Le superficie d'onda possono avere tuttavia forma qualsiasi: nei mezzi isotropi però hanno sempre la proprietà di essere in ogni punto perpendicolari alla direzione di propagazione (come evidentemente avviene nelle onde sferiche). A grande distanza dalla sorgente le superficie d'onda si possono considerare *piane*. Per le analogie di comportamento accennate sopra, possiamo allora enunciare l'attendibile ipotesi che *le radiazioni infra-*

rosse, le luminose, le ultraviolette, i raggi X, i raggi γ *sono, al pari delle hertziane, radiazioni elettromagnetiche.*

Si è riusciti a misurare, nei vari casi, il *periodo T* delle vibrazioni o la *lunghezza d'onda* λ, uguale a T moltiplicato per la velocità v di propagazione. Il più piccolo periodo, e quindi la più piccola lunghezza d'onda, è dei raggi γ (è dell'ordine di 10^{-10} cm.); poi vengono i raggi X, poi le radiazioni ultraviolette, poi le luminose (nelle quali λ va crescendo da $0,4 \cdot 10^{-4}$ cm., per il violetto, a $0,8 \cdot 10^{-4}$ cm., per il rosso), poi le infrarosse, e, infine, con lunghezza d'onda che raggiungono vari chilometri, le radiazioni hertziane.

Quando diciamo dunque che in un punto dello spazio vi è luce, ciò che ivi avviene è questo: vi è un campo elettrico rapidissimamente alternato (cioè una carica elettrica posta in quel punto sarebbe soggetta a una forza rapidissimamente alternata) accompagnato da un campo magnetico ad esso perpendicolare, anch'esso variabile con la stessa legge e la stessa rapidità. Questi campi, che, se fossero costanti o lentamente variabili, si manifesterebbero con ordinari fenomeni elettrostatici o magnetici, danno luogo, invece, per l'altissima frequenza delle loro alternanze, a tutto quell'insieme di fenomeni fisici e fisiologici che chiamiamo effetti della luce. Per potere ammettere però l'ipotesi della natura elettromagnetica della luce è necessario, tuttavia, rendersi conto del processo per cui da una fiamma o da un corpo incandescente possono nascere delle radiazioni elettromagnetiche simili a quelle dell'oscillatore di Hertz, salvo la frequenza assai maggiore. Sappiamo che gli atomi di qualunque sostanza possono ritenersi costituiti da minutissimi corpuscoli elettrizzati, in continuo e rapidissimo movimento: quelli con carica positiva si chiamano *protoni* e quelli con carica negativa *elettroni*. Poichè una carica elettrica in movimento equivale ad una corrente elettrica, un elettrone che oscilli rapidamente lungo un segmento di retta, con moto pendolare, equivale ad una corrente elettrica alternata simile a quella che si desta nell'oscillatore di Hertz ad ogni scarica oscillatoria: esso quindi emette una radiazione elettromagnetica, la cui frequenza è data appunto dalla frequenza delle sue oscillazioni.

Faremo un breve cenno storico sulle teorie della luce. L'analogia fra il rimbalzo di un corpo elastico contro un ostacolo e la riflessione della luce, come pure l'analogia fra il moto di un proiettile lanciato a grande velocità e il modo di propagarsi della luce per raggi rettilinei, hanno suggerito l'ipotesi che la luce sia costituita da particelle materiali elastiche lanciate come dei proiettili. Le teorie della luce basate su queste ipotesi si dicono *corpuscolari* o *balistiche*. Newton fu fautore

della teoria corpuscolare, ma i fenomeni di diffrazione, di interferenza e di polarizzazione, nonchè molti altri fenomeni, che all'epoca di Descartes e di Newton non erano conosciuti, non potevano spiegarsi con siffatta teoria. L'analogia dei fenomeni luminosi con quelli del suono fece sorgere, poco dopo, l'ipotesi corpuscolare, l'ipotesi cioè che anche la luce fosse propagata dalle oscillazioni di un mezzo elastico che fu chiamato *etere*. Questa teoria, detta *elastica* o *ondulatoria*, dovuta a Huyghens, in analogia con i fenomeni acustici, supponeva una propagazione della luce a onde *longitudinali*. Venivano spiegati così, non solo i fenomeni di propagazione, riflessione e rifrazione, ma anche i fenomeni di diffrazione e di interferenza, i quali in acustica dipendono appunto dalla natura ondulatoria del suono. Senonchè la teoria di Huyghens urtò contro una grave difficoltà: non riusciva a spiegare il fenomeno di polarizzazione. Fu Fresnel che modificò la teoria del celebre fisico olandese ammettendo che le oscillazioni dell'ipotetico mezzo elastico fossero *trasversali* e non *longitudinali*. Con questa ipotesi anche il fenomeno di polarizzazione poteva essere perfettamente spiegato. Tuttavia anche la teoria di Fresnel doveva imbattersi contro nuovi insormontabili ostacoli. Si constata che le vibrazioni elastiche trasversali possono essere trasmesse dai corpi *solidi*, non dai *fluidi*, ciò che è in netto contrasto con altre proprietà dell'etere. Questo, infatti, pur essendo solido, deve lasciarsi attraversare dai corpi materiali senza opporre alcuna resistenza, altrimenti risulterebbe molto difficile spiegare il moto dei pianeti, e, specialmente, il moto di astri animati da velocità grandissime. Per merito di Faraday sorgeva, nel 1837, un indirizzo nuovo circa gli studi dei fenomeni elettrici. Egli richiamò l'attenzione sui fenomeni che avvengono nel *mezzo* (sia esso il vuoto o un dielettrico) e *attribuì alle linee di forza che solcano il mezzo una esistenza reale* e non un valore di semplice rappresentazione geometrica del campo. Maxwell, qualche anno dopo, diede una veste matematica alle geniali idee di Faraday, aggiungendo la nozione fondamentale di *corrente di spostamento*: egli scrisse le 6 note equazioni differenziali, che legano il campo elettrico e il campo magnetico, deducendo da esse che tali campi si propagano nello spazio con la velocità di 300.000 km. al secondo, e la coincidenza numerica di questa velocità con quella trovata sperimentalmente per la luce lo trasse a pensare che quelle vibrazioni trasversali, che secondo Fresnel ed altri costituiscono la luce, si debbono interpretare non come oscillazioni materiali, ma come *oscillazioni del campo elettrico e magnetico*. *La teoria elettromagnetica della luce*, formulata da Maxwell, non contraddice le precedenti teorie ondulatorie, ma, al contrario, le rende più comprensi-

bili, eliminando le difficoltà accennate, relative alla propagazione di onde *trasversali* in un mezzo fluido, come si pensa abitualmente che sia l'etere.

Maxwell aveva fondato la Teoria elettromagnetica prima che si fosse provata sperimentalmente l'esistenza di onde elettromagnetiche : sette anni dopo la morte di Maxwell, nel 1886, Hertz, con il rocchetto di Ruhmkorff, riuscì a far sprigionare le onde elettromagnetiche, potendo altresì misurarne la velocità, che trovò identica a quella della luce, così, come in linea teorica, aveva previsto Maxwell. Un ulteriore sviluppo della teoria elettromagnetica tendeva a spiegare dei fenomeni che mettono in relazione le *radiazioni* con la *materia* (emissione, assorbimento, rifrazione, dispersione, effetto fotoelettrico, ecc.) : questa spiegazione si cercava nel fatto che il moto degli elettroni, costituenti la materia, genera onde elettromagnetiche, e, viceversa, queste onde possono far oscillare, per effetto dei loro campi elettrici e magnetici, gli elettroni che investono. Ora nei fenomeni concernenti la mutua azione fra radiazione e materia, la teoria in questione spesso non si accorda con l'esperienza : le equazioni di Maxwell non sono sempre applicabili, per cui sono state sostituite da altre leggi, le quali costituiscono la *Teoria dei Quanti*, fondata da Planck, con cui si spiegano molti fenomeni rimasti inesplicabili con le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo. Anche per quanto riguarda la propagazione della luce in certi casi si è dovuto sostituire al modello delle onde elettromagnetiche un modello più simile a quello della teoria corpuscolare ; bisogna però precisare che non si tratterebbe di veri corpuscoli, ma di localizzazioni puntiformi dell'energia elettromagnetica, dette *quanti di luce*. È stata ottenuta una formula che concilia la teoria elettromagnetica classica con le teorie quantistiche.

Quanto all'etere, si pensa ora che i fenomeni elettromagnetici (e quindi luminosi) possano propagarsi attraverso lo spazio «vuoto», al pari delle azioni gravitazionali. «Tutti i tentativi di fare dell'etere una realtà, scrive Einstein (30, *b* ; 184), sono falliti. Nulla è rimasto di tutte le proprietà dell'etere, eccetto quella per la quale esso venne inventato, ovvero la facoltà di trasmettere onde elettromagnetiche. E poichè i nostri tentativi per scoprire le proprietà non hanno fatto che creare difficoltà e contraddizioni, sembra giunto il momento di dimenticare l'etere e di non pronunciarne più il nome ». Ancora Einstein scrive (30, *d* ; 259) : «Lo spazio fisico e l'etere non sono che due espressioni differenti d'una sola e medesima cosa ; i campi sono gli stati fisici dello spazio ». «Ad ogni tentativo sperimentale, dice Jeans (72, I ; 4), la na-

tura sembra risponderci che non c'è etere o che almeno i fenomeni naturali procedono come se l'etere non ci fosse ».

Per una trattazione esauriente dell'ottica rimandiamo ai trattati specializzati, come quello, magistrale, di Enrico Persico, da cui abbiamo tratto la maggior parte delle notizie contenute in questa breve sintesi. A noi basta quanto abbiamo detto. Abbiamo risposto essenzialmente alle domande che ci eravamo poste in principio del capitolo, precisando la natura elettromagnetica della luce e la sua propagazione *per ipotesi* rettilinea, associata all'interpretazione delle sensazioni visive, fra cui il rilevantissimo fenomeno psicologico dell'occhio che *prolunga mentalmente in linea retta i raggi luminosi,* nella direzione con cui questi vi penetrano.

CAPITOLO III.

Equivalenza fra spazio euclideo e spazio non euclideo a curvatura variabile.

Il campo e la struttura del mondo – Le due ipotesi: convessità e concavità della superficie terrestre – La linea retta in Astronomia – Inversione o trasformazione circolare o per raggi vettori reciproci fra due piani e fra due spazi sovrapposti – L'inversione applicata al mondo fisico – Geodetiche euclidee e geodetiche non euclidee – Tangente rettilinea esosferica e tangente curvilinea endosferica – Spazio euclideo e spazio non euclideo a curvatura variabile – Equivalenza fra i due spazi – La legge di propagazione della luce e la forma della Terra – Il bastimento che va « dietro l'orizzonte » – Il punto debole della misura geodetica di Gauss.

La natura ha gli stessi modelli in diverse grandezze.

LAPLACE

Vi sono, come abbiamo visto nel cap. I di questa terza parte, diversi punti deboli nella concezione attuale del mondo. La simmetrica caduta dei raggi cosmici sulla superficie terrestre fa pensare ad una loro comune origine, situata nel centro di una sfera cava, piuttosto che ad una sorgente, che per « strana combinazione », come scrive Eddington, fosse « distribuita simmetricamente attorno alla Terra ». In altri termini, se ogni punto della Terra riceve, a un dipresso, ugual quantità di radiazione cosmica, sorge spontanea alla mente la ipotesi di una sorgente *centrale* irradiante *uniformemente* i punti di una superficie sferica *concava*. Per quanto insolita, una idea siffatta, per un fenomeno così singolare com'è quello considerato, salta alla mente, ripeto, spontaneamente. Così la «strana combinazione» non avrebbe più luogo, come non presenterebbe più alcuna stranezza il comune comportamento notato nelle Cefeidi, nè si verificherebbe più la dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole, ecc.

Ma vi è di più. Nel secolo scorso si è affermato il concetto di campo. Einstein, dopo aver esaminato l'ascesa e la decadenza dell'interpreta-

zione meccanicistica di fondamentali fenomeni della natura, scrive (30, *b* ; 153, 252 e 255) : « Un nuovo concetto, l'invenzione più importante dal tempo di Newton in poi, s'introduce nella fisica e cioè il concetto di campo. ...Nella descrizione dei fenomeni elettrici non sono nè le cariche nè le particelle che costituiscono l'essenziale, bensì lo spazio intermedio fra cariche e particelle. Il concetto di campo si dimostra fertilissimo. La definizione quantitativa, ovvero matematica, del campo si riassume nelle equazioni che portano il nome di Maxwell, importanti non soltanto per la dovizia del loro contenuto, ma anche perchè esse hanno fornito il modello di un nuovo tipo di legge. I caratteri essenziali delle equazioni di Maxwell, caratteri condivisi da tutte le altre equazioni della fisica moderna, possono riassumersi in una breve proposizione, e cioè : *le equazioni di Maxwell sono leggi che definiscono la struttura del campo.* Esse governano non soltanto i fenomeni elettrici, ma anche quelli ottici... La Teoria della Relatività accentua l'importanza che nel dominio della Fisica spetta al concetto di campo. Campo è energia. Si ha materia ove la concentrazione di energia è grande; si ha campo ove la concentrazione di energia è debole. La differenza fra materia e campo è d'ordine quantitativo, non qualitativo ».

L'avvento, dunque, di un concetto di così vasta portata per la descrizione di fenomeni fisici suggerisce una immediata estrapolazione : l'idea, cioè, che *l'Universo, nel suo complesso, abbia la struttura di un campo.* Einstein afferma l'esistenza di un campo, senza tuttavia insistere sulla necessità di precisarne le sorgenti. « Un campo, egli scrive (30, *b* ; 143), è sempre presente, anche in mancanza di un polo magnetico che ne riveli l'esistenza ». Un tale asserto non sembra possa pienamente soddisfare. Un Universo che presenti i caratteri strutturali di un campo e che si riveli in virtù di sorgenti cosmiche determinate è più accettabile. Il concetto di campo induce l'idea di un Universo concepito come *il campo universale,* sulle orme del pensiero di un sommo quale fu Laplace, che diceva : « La natura ha gli stessi modelli in diverse grandezze ».

Il Sole e la fonte dei raggi cosmici, situata nel centro della sfera cava terrestre e irradiante la sua superficie concava, non potrebbero presumibilmente costituire le sorgenti, le cariche del campo universale ?

Un'ipotesi siffatta non poteva nascere prima della enunciazione del concetto e della descrizione della struttura del campo. Questo spiega perchè prima della nascita del concetto di campo l'idea di un mondo cavo non abbia mai sfiorato la mente di un fisico : i fattori ottici, senza l'idea di campo legata ai fenomeni elettromagnetici, e quindi a quelli

della luce, non potevano venire ragionevolmente spiegati in modo diverso da quello tradizionale. Un'idea siffatta pertanto non può nemmeno essere enunciata se, posta l'ipotesi di una Terra concava, non se ne considerino immediatamente le conseguenze per quanto riguarda le osservazioni. Dobbiamo domandarci se una immagine fisica del mondo diversa da quella classica è ancora d'accordo con i dati d'osservazione. Questo punto è, ovviamente, essenziale. « Il mondo quale ce lo rappresenta la scienza fisica, cioè l'immagine fisica del mondo, scrive Planck (73; 188), ...varia e va soggetto a un certo sviluppo». Ma se può variare il mondo quale ce lo rappresenta la fisica, non mutano tuttavia i dati d'osservazione. Le fasi lunari, le eclissi, le costellazioni appaiono a noi nello stesso modo come apparivano a Newton, a Kepler, a Tolomeo, ai Caldei e ai Babilonesi, pur essendo assai diversa l'immagine fisica, che del mondo si formarono gli antichi, da quella di Kepler e di Newton.

Esaminiamo questi dati d'osservazione della concezione classica del mondo : essi si fondano sulla *teoria della rettilineità dei raggi luminosi*. L'ente suggerito da certe esperienze ottiche è la linea retta euclidea. Nel cap. VIII, parte I, abbiamo esaminato i fenomeni fisici che ci suggeriscono l'idea di retta euclidea. Per quanto riguarda lo spazio celeste, dobbiamo trascurare i fenomeni connessi con il tatto (movimento rotatorio dei corpi *solidi*, ove la retta si presenta come asse di rotazione) e con il senso muscolare (dinamica dei *punti materiali*, ove la retta si presenta come *traiettoria* di un punto) : lo spazio astronomico è, come abbiamo visto nella Parte I, uno spazio di tipo ottico, quindi la linea retta si presenta come *raggio* ed è connessa con lo studio delle radiazioni.

Sui recenti esperimenti di lancio di satelliti e di razzi parleremo nel cap. XV : qui ricordiamo solo che i segnali inviati dai razzi sono della stessa natura della luce, cioè onde elettromagnetiche, e quindi lo spazio astronomico è ancora da considerarsi di tipo ottico, o, se si vuole, elettromagnetico.

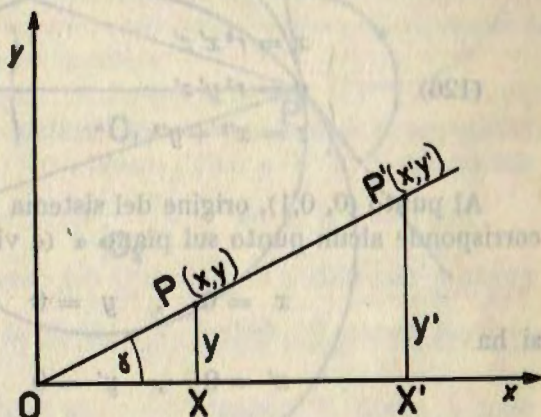
« Ciò che si chiama *linea retta* in astronomia, scrive Poincaré (74, *a* ; 80), è semplicemente la traiettoria del raggio luminoso ». A parità di dati d'osservazione dobbiamo formulare una diversa quanto attendibile ipotesi sulla propagazione della luce. È possibile tutto ciò ? Vedremo subito che la risposta è affermativa.

La geometria euclidea è quella coordinabile alle ordinarie esperienze ottiche, e, più precisamente, è quella suggerita dal comportamento dei raggi luminosi nelle esperienze « grossolane », come le qualifica Perucca (72, II ; 21), dell'ombra, della penombra, del pennello di luce, che penetra da una finestra nell'aria polverosa o fumosa di una stanza

buia. Possiamo tuttavia supporre un comportamento non rettilineo dei raggi luminosi con il medesimo diritto con cui si è supposta la loro rettilineità, *purchè i dati d'osservazione rimangano rispettati*. Ciò significa che i raggi luminosi debbono intersecarsi sotto angoli identici sia nell'ipotesi della rettilineità che in quella della non rettilineità. Lo spazio geometrico euclideo, astrazione dello spazio ottico classico, deve essere sostituito, allora, da uno spazio geometrico non euclideo, corrispondente ad una diversa ipotesi circa le traiettorie luminose: i due spazi, corrispondenti alle due diverse ipotesi, debbono essere legati da una trasformazione, che non muti i dati d'osservazione, da una trasformazione, cioè, *isogonale* o *conforme*; due linee dello spazio euclideo, passanti per un generico punto, debbono tagliarsi sotto lo *stesso* angolo sotto cui si tagliano le due *corrispondenti* linee dello spazio trasformato non euclideo nel punto P' corrispondente a P. Poichè «la *linea retta* in astronomia non è che la traiettoria del raggio luminoso», dovremo applicare, quindi, una trasformazione geometrica, nella quale si abbia una corrispondenza puntuale biunivoca con invarianza degli angoli. La matematica conosce questa trasformazione sotto il nome di *inversione* o *trasformazione circolare* o *per raggi vettori reciproci*. In tale trasformazione ad ogni punto fuori di una sfera ne corrisponde uno, e uno solo, dentro la sfera, e viceversa (corrispondenza puntuale biunivoca). I punti sulla sfera, nella trasformazione, corrispondono a se stessi. Notevole la seguente singolarità: al piano all'∞, cioè alle infinite direzioni fuori della sfera, corrisponde, nella trasformazione, un sol punto, il centro della sfera, centro nel quale avevamo configurato, in via d'ipotesi, la fonte dei raggi cosmici, essendo il Sole l'altra sorgente del campo universale. Esponiamo ora questa trasformazione: occorrerà soffermarci a lungo su questo argomento e su altri aspetti del problema prima di considerare la configurazione del campo universale, cui si perviene, e che vedremo nel cap. VI. Per semplicità esporremo la trasformazione riferita al piano: la sua estensione allo spazio è immediata.

Considereremo la corrispondenza fra i punti di un piano α e i punti di un piano α', che supporremo *sovrapposto* ad α. Ciò premesso, tuttavia, per semplicità e per non doverci costantemente ripetere, ci riferiremo brevemente al piano, in generale senz'altra indicazione.

Scelto un punto O, che si chiama *centro d'inversione*, si farà corrispondere ad ogni punto P del piano il punto P', allineato con O, e tale che il prodotto $\overline{OP} \cdot \overline{OP'}$ sia eguale ad una costante $|r^2|$, detta *potenza d'inversione*. Questa si considererà positiva o negativa, secondo che i punti P e P' corrispondenti stanno dalla stessa parte o da parte opposta

di O : e così si distinguono due specie di inversioni. In ogni caso il raggio vettore $\overline{OP'}$ sarà terzo proporzionale dopo OP ed un segmento costante r, detto *raggio d'inversione*; il cerchio di centro O e raggio r, che riesce *unito* per la trasformazione (corrisponde cioè a se stesso), si chiama *cerchio d'inversione* e, se l'inversione ha una potenza positiva r^2, è *luogo di punti uniti* (cioè non solo corrisponde a se stesso come insieme di punti nella trasformazione, ma risulta costituito di punti, *ciascuno* dei quali, nella trasformazione, corrisponde a se stesso). Trascureremo in seguito il caso in cui si ha una potenza negativa $-r^2$ e, quindi, per l'inversione non vi sono punti uniti reali. Precisando meglio, per punto *unito* o *doppio* intendiamo un punto Q di α che corrisponde ad un punto Q' di α', sovrapposto a Q (coincidente con Q). Costruiamo le formule di trasformazione. Sia $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, relazione che giustifica il nome di trasformazione per raggi vettori reciproci, con cui si indica l'inversione circolare (per $r = 1$, il vettore $\overline{OP}$ è eguale al *reciproco* del vettore $\overline{OP'}$). Sulla retta uscente da O ad ogni punto P corrisponde un punto P'. Se $P \to O$, $P' \to \infty$. Inoltre al punto P della retta (punteggiata) OP, considerata appartenente al piano α, corrisponde il punto P' della retta (punteggiata) OP', considerata appartenente al piano α' e sovrapposta a OP. Al punto P di α corrisponde il punto P' di α', e al punto P' di α' corrisponde il punto P di α : quindi questa corrispondenza puntuale biunivoca è una *involuzione*, ciò che è evidente per la simmetria in cui appaiono P e P' nella precedente relazione.

Si ha

$$x = OP \cdot \cos\gamma = OP \cdot \frac{OP'^2}{OP'^2} \cdot \cos\gamma = r^2 \cdot \frac{OP' \cos\gamma}{OP'^2} = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2}$$

$$y = OP \cdot \sin\gamma = OP \cdot \frac{y'}{OP'} = OP \cdot OP' \cdot \frac{y'}{OP'^2} = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

Le formule di trasformazione sono, quindi,

$$(125) \qquad x = \frac{r^2\, x'}{x'^2 + y'^2} \quad , \quad y = \frac{r^2\, y'}{x'^2 + y'^2}$$

essendo le inverse [le (125) sono razionalmente invertibili]

$$(125)' \qquad x' = \frac{r^2\, x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{r^2\, y}{x^2 + y^2} \, .$$

In coordinate omogenee le (125) e le (125)′ diventano rispettivamente

$$(126) \qquad \begin{cases} x = r^2 x' z' \\ y = r^2 y' z' \\ z = x'^2 + y'^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = r^2 x z \\ y' = r^2 y z \\ z' = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Al punto (0, 0,1), origine del sistema di coordinate del piano α non corrisponde alcun punto sul piano α' (e viceversa). Infatti per

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 1$$

si ha

$$x' = 0 \quad , \quad y' = 0 \quad , \quad z' = 0$$

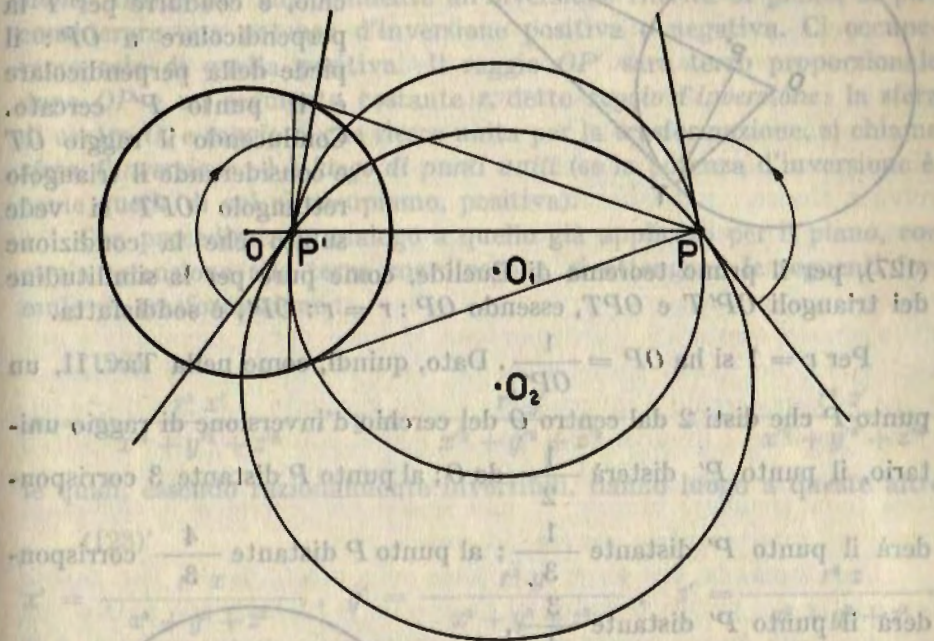
Se prendiamo un punto su una retta passante per O e lo facciamo tendere ad O, ad esso corrisponde il punto all'infinito (direzione) della retta stessa. Quindi, facendo *provenire* il punto origine (0,0,1) da una direzione, ad esso non corrisponde un punto, ma una *direzione*. Ad una *direzione* cioè corrisponde una *direzione*. In altre parole, meno rigorosamente, al punto O di α corrisponde la retta all'∞, cioè $z' = 0$ di α', e viceversa. Ad ogni punto (finito) di α, che *non sia l'origine*, corrisponde uno, e un sol punto, di α', e viceversa.

Dalle (125), (125)′ e (126) si traggono facilmente le proprietà di cui gode l'inversione per raggi vettori reciproci :

1) Muta cerchi in cerchi, e, in particolare, le rette in cerchi passanti per il centro d'inversione O. Resta escluso il caso in cui la retta passi per O, perchè allora questa si muta in se stessa.

2) Ogni cerchio, che passi per due punti, che si corrispondono in una inversione, corrisponde a se stesso, cioè risulta *unito* per l'inver-

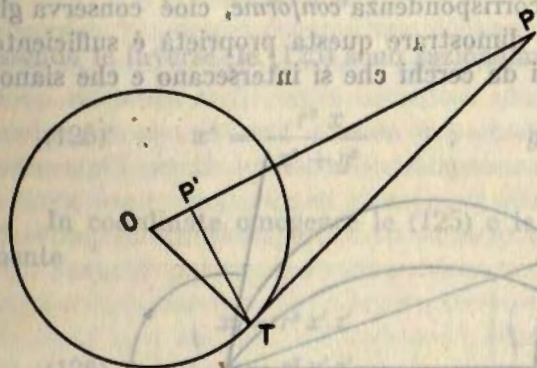
sione. Un cerchio che, in una inversione, corrisponde a se stesso, taglia *ortogonalmente* il cerchio d'inversione (se l'inversione ha potenza positiva, cioè quella di cui in particolare ci occupiamo).

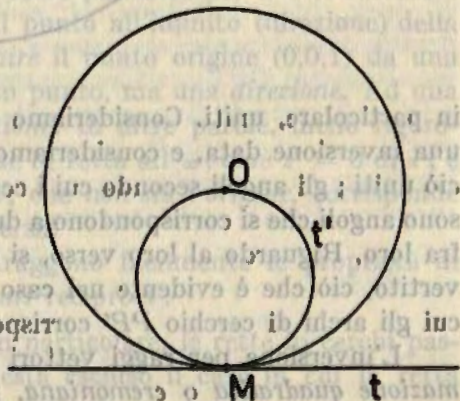
3) L'inversione è una corrispondenza *conforme*, cioè conserva gli angoli e ne muta il verso. Per dimostrare questa proprietà è sufficiente considerare gli angoli formati da cerchi che si intersecano e che siano,

in particolare, uniti. Consideriamo due punti P e P' corrispondenti in una inversione data, e consideriamo due cerchi uscenti da P e P' e perciò uniti; gli angoli secondo cui i cerchi considerati si tagliano in P e P' sono angoli che si corrispondono a due a due nell'inversione e sono uguali fra loro. Riguardo al loro verso, si osserverà che esso viene sempre invertito, ciò che è evidente nel caso d'inversione a potenza positiva, in cui gli archi di cerchio PP' corrispondono a se stessi.

L'inversione per raggi vettori reciproci è una particolare *trasformazione quadratica* o *cremoniana*, i cui 3 *punti fondamentali* sono il centro O d'inversione e i punti ciclici.

Vediamo ora come si procede, con riga e compasso, per trovare, dato un punto P, il corrispondente punto P'. Fissato nel piano un cir-

colo di centro O e raggio r, sia P un punto qualunque nel piano, diverso da O, e consideriamo il punto P' del piano, situato sulla retta OP e dalla stessa banda di P rispetto ad O, e tale che si abbia:

$$(127) \quad OP \cdot OP' = r^2$$

Basta condurre per P la tangente PT al cerchio, e condurre per T la perpendicolare a OP: il piede della perpendicolare è il punto P' cercato. Conducendo il raggio OT e considerando il triangolo rettangolo OPT si vede subito che la condizione (127), per il primo teorema di Euclide, come pure per la similitudine dei triangoli $OP'T$ e OPT, essendo $OP : r = r : OP'$, è soddisfatta.

Per $r = 1$ si ha $OP = \frac{1}{OP'}$. Dato, quindi, come nella Tav. II, un punto P che disti 2 dal centro O del cerchio d'inversione di raggio unitario, il punto P' disterà $\frac{1}{2}$ da O; al punto P distante 3 corrisponderà il punto P' distante $\frac{1}{3}$; al punto P distante $\frac{4}{3}$ corrisponderà il punto P' distante $\frac{3}{4}$, e così via. La tangente t in un punto M del cerchio d'inversione, per essere M punto unito e per la proprietà 1), si muta in un cerchio t', passante per O e per M, avente per diametro il raggio del cerchio d'inversione. Chiameremo t *tangente rettilinea*, e t' *tangente curvilinea* (Tav. I).

Per quanto si è detto, dunque, ad ogni punto del piano *esterno* al cerchio d'inversione, ne corrisponde uno, e uno solo, *interno* a tale cerchio (e viceversa). E quindi ad ogni figura — che non è se non un insieme di punti — situata

esternamente al cerchio di inversione, ne corrisponde una, e una sola, interna ad esso (e viceversa).

La trasformazione per raggi vettori reciproci si estende immediatamente allo spazio, o meglio, a due spazi sovrapposti. Scelto un punto O, che chiamiamo ancora centro d'inversione, facciamo corrispondere ad ogni punto P dello spazio il punto P' allineato con O e tale che il prodotto $OP \cdot OP'$ sia uguale ad una costante $\{r^2\}$, detta *potenza d'inversione*. Anche qui, analogamente all'inversione riferita al piano, si può considerare una potenza d'inversione positiva o negativa. Ci occuperemo solo di quella positiva. Il raggio OP' sarà terzo proporzionale dopo OP e un segmento costante r, detto *raggio d'inversione*: la sfera di centro O, e raggio r, che riesce unita per la trasformazione, si chiama *sfera d'inversione* ed è *luogo di punti uniti* (se la potenza d'inversione è, come quella di cui ci occupiamo, positiva).

Con procedimento analogo a quello già applicato per il piano, con ovvia estensione alla terza coordinata z, si ottengono le seguenti formule di trasformazione:

(128)

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad z = \frac{r^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

le quali, essendo razionalmente invertibili, danno luogo a queste altre

(128)'

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le considerazioni fatte per l'inversione nel piano si estendono agevolmente all'inversione nello spazio; dalle (128) si deducono, analogamente, le proprietà di cui gode l'inversione per raggi vettori reciproci nello spazio:

1) Muta sfere in sfere, e, in particolare, i piani in sfere passanti per il centro della sfera d'inversione, e, ovviamente, viceversa. Resta escluso il caso in cui il piano passi per O, perchè allora questo si muta in se stesso.

2) Ogni sfera, che passi per due punti, che si corrispondono in una inversione, corrisponde a se stessa, cioè risulta unita per l'inversione. Una sfera, che, in una inversione, corrisponde a se stessa, taglia *ortogonalmente* la sfera d'inversione (se l'inversione ha potenza positiva, cioè quella di cui in particolare ci occupiamo).

3) L'inversione è una corrispondenza *conforme*, cioè conserva gli angoli e ne muta il verso.

Come nell'inversione nel piano la tangente in un punto del cerchio d'inversione si muta in un cerchio passante per *O*, così nell'inversione nello spazio un piano tangente alla sfera d'inversione in un punto *M* si muta in una sfera passante per *O* e per *M* e avente per diametro il raggio della sfera d'inversione. Pertanto, in questa corrispondenza o inversione spaziale per raggi vettori reciproci, ad ogni figura (a una, due, tre dimensioni) situata fuori della sfera d'inversione, ne corrisponde una, ed una sola, (rispettivamente a una, due, tre dimensioni) situata dentro la sfera, e viceversa.

Applichiamo ora siffatta trasformazione al mondo fisico. Prendiamo come sfera di inversione la superficie della Terra, che considereremo sferica: immediatamente si comprende come all'intero Universo pensato nello spazio ottico euclideo, *esterno* alla sfera terrestre, può farsi corrispondere un altro Universo in uno spazio ottico non euclideo, *interno* alla sfera terrestre. Alle linee rette (geodetiche euclidee) dello spazio esosferico, corrispondono le linee curve (geodetiche non euclidee) dello spazio endosferico. La Tav. IV illustra tale trasformazione: il semicerchio d'inversione è quello graduato. Le geodetiche rettilinee (euclidee) proprie dello spazio piano, uniforme, intersecantesi ad angoli retti (fig. inf.), si trasformano (fig. sup.) in geodetiche curvilinee (non euclidee) proprie di uno spazio non euclideo a curvatura variabile, intersecantesi ancora ad angoli retti.

Una domanda, che sorge spontanea nella mente di chi, non ancora ben edotto dei precisi termini del problema, si riferisce allo spazio non euclideo della nuova concezione nei termini dello spazio euclideo, è la seguente: « Come può tutto l'Universo copernicano essere contenuto dentro la sfera cava ? ». Nel cap. VI vedremo come la materia dell'Universo classico non differisca quantitativamente da quella dell'Universo endosferico, la differenza consistendo solo nella sua *densità* enormemente minore nel primo che nel secondo. Circa poi l'aspetto geometrico del problema (corrispondenza puntuale), e, precisamente, attorno alla questione se « la infinità dei punti della linea maggiore eccederà l'infinità dei punti della linea minore », ricordo qui un passo tratto dal « Dialogo sopra i due Massimi Sistemi » di Galileo Galilei (36; 181): « Un infinito maggior dell'infinito mi par concetto da non poter esser capito in verun modo. Queste sono difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che

sia inconveniente, perchè stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino agli infiniti, dei quali non si può dire uno esser maggiore o minore o eguale all'altro... Quando il Signor Simplicio mi propone più linee disuguali, e mi domanda come possa esser che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono nè più nè manco nè altrettanti, ma in ciascheduna infiniti ».

I due spazi, pertanto, quello esosferico e quello endosferico, per la relazione che li lega, per la corrispondenza puntuale biunivoca, che fra di essi intercede, si equivalgono.

Sui metodi pratici per le anzidette trasformazioni ci soffermeremo nel prossimo capitolo. Ora occorre domandarci se tale spazio non euclideo può applicarsi allo spazio ottico, compatibilmente con i dati d'osservazione.

Abbiamo visto come la *tangente rettilinea* dello spazio esosferico si trasformi in *tangente curvilinea* dello spazio endosferico. Questa tangente curvilinea non è che un cerchio passante per *O*, avente per diametro (nell'applicazione che stiamo per fare) il raggio della Terra (uguale a 6370 km) e quindi una cironferenza di circa 20.000 km. Nel capitolo precedente abbiamo visto che la flessione di un arco di circonferenza, di raggio pari a km. 3000, lungo 100 metri, è inferiore a 7 secondi di arco. Nel caso considerato sopra, un arco di tangente curvilinea lungo 100 metri ha una flessione ancora più piccola. Ci troviamo quindi di fronte a flessioni piccolissime : la tangente rettilinea dello spazio esosferico, entro i limiti della zona terrestre, tende a confondersi con la tangente curvilinea dello spazio endosferico. In buona approssimazione, in sede sperimentale, può ammettersi valida, cioè in accordo con i dati d'osservazione, sia la geodetica rettilinea sia quella curvilinea : ciò, come s'è detto, in prossimità della superficie terrestre, perchè, a misura che ci si avvicina al centro della sfera le geodetiche accentuano sempre di più le loro curvature e lo spazio acquista un carattere nettamente diverso da quello euclideo, rivelando la sua natura di spazio non euclideo a curvatura variabile (Tav. IV). A proposito di curvature spaziali, incidentalmente ricordiamo che il fisico inglese William Kingdom Clifford (1845-1879) aveva affacciato l'idea che ciò, che noi sentiamo come forza o come calore o come elettricità, possa rispondere ad una variazione della curvatura dello spazio (37 ; 15). Ci si potrebbe domandare ora se la verifica di una flessione, pari a 7 secondi di arco, di un arco lungo 100 metri sia realizzabile. La risposta è negativa: in primo luogo per le difficoltà implicite nelle misurazioni di tali ordini di gran-

dezza; in secondo luogo — e questa è la ragione più profonda dell'impossibilità di effettuare simili verifiche — perchè la natura non euclidea dello spazio da noi considerato, con le sue geodetiche non euclidee, implica movimenti non rigidi e la partecipazione di tali deformazioni da parte di tutti gli oggetti, compresi gli strumenti di misura. In una analoga difficoltà s'imbatterebbe chi volesse verificare se un asse di ferro, ad es., lungo 3 metri, tangente alla superficie terrestre, subisca o no una flessione, in modo da stabilire se lo spazio è o non è euclideo. Con facile calcolo si trova che la freccia di flessione, che tale asse subisce nello spazio endosferico, è inferiore a mezzo millesimo di millimetro. Anche ammettendo, per assurda ipotesi, di poter misurare l'incurvamento con uno strumento, che, pur essendo immerso nello spazio non euclideo, obbedisse alle leggi dello spazio euclideo (non fosse cioè soggetto a incurvamenti), tale verifica sarebbe impossibile, perchè, per flessioni dell'ordine di grandezza testè calcolate, si rientrerebbe nell'ordine degli errori di osservazione.

È interessante il seguente passo di Helmholtz: «L'immagine, in uno specchio sferico, di un uomo, che misuri, con un regolo, una linea retta, si contrae sempre di più, a misura che egli si allontana, ma con il suo regolo, che, anch'esso, va accorciandosi, l'uomo, nell'immagine, conterà lo stesso numero di centimetri valutati dall'uomo reale. E, in generale, tutte le misure geometriche di linee ed angoli effettuate con immagini, che variano con regolarità, dello strumento reale, forniranno esattamente gli stessi risultati che si ottengono nel mondo esterno. Tutti i corpi congruenti coincideranno, essendo applicati gli uni sugli altri tanto nello specchio come nel mondo esterno... In breve, io non vedo come gli uomini nello specchio possano scoprire che i loro corpi non sono rigidi e che le loro esperienze non costituiscono buoni esempi della correttezza del postulato di Euclide».

Nel capitolo V torneremo a parlare dell'argomento. Qui vogliamo confermare e precisare meglio quanto dicevamo nel capitolo precedente: in buon accordo con i fatti dell'esperienza ordinaria, possono ritenersi *ugualmente valide*, per quanto riguarda la traiettoria percorsa da un raggio luminoso nello spazio prossimo alla superficie terrestre, sia la legge classica della propagazione rettilinea della luce sia la legge di propagazione curvilinea. Nella Tav. I possono osservarsi le due interpretazioni e le due «prove», rispettivamente, della convessità e della concavità della superficie terrestre. Il disco si presenta alla vista telescopica per metà nascosto «dietro l'orizzonte». Se la traiettoria dei raggi luminosi è rettilinea (tangente rettilinea) allora tale vista tele-

scopica « prova » che la Terra è convessa. Se la traiettoria dei raggi luminosi è curvilinea (tangente curvilinea), allora quella *stessa* vista telescopica « prova » che la Terra è concava. Lo stesso discorso vale per la fotografia infrarossa del Monte Aconcagua (Tav. VI) e per il bastimento che va « dietro l'orizzonte », come si legge in tutti i libri scolastici (osservare la Tav. XVI sopra la parola « mattina »).

Lo spazio celeste, abbiam detto, nelle profondità differisce notevolmente dallo spazio ordinario o terrestre. La Teoria classica, estrapolando, aveva attribuito allo spazio ottico celeste gli stessi caratteri dello spazio ottico terrestre. In luogo di quella ipotesi, noi ne proponiamo un'altra, e cioè l'ipotesi di una propagazione curvilinea della luce, legata alla prima dalla legge di trasformazione (125) e (128). La ragione per cui la volta del cielo ci appare come un emisfero còncavo viene illustrata nella Tav. X, su cui torneremo estesamente nel cap. VIII.

Nel capitolo precedente abbiamo studiato il fenomeno psicologico dell'occhio che *prolunga mentalmente in linea retta i raggi luminosi*, nella direzione con cui questi vi penetrano. Un osservatore (Tav. X), situato nel punto medio del diametro A' E', prolungando mentalmente il raggio luminoso nella direzione con cui entra nel suo occhio, crede di osservare, ad es, il punto A', mentre è il punto A l'oggetto della sua osservazione. Lo stesso dicasi per gli oggetti B, C, D, E, che egli proietta mentalmente nei punti B', C', D', E'. La volta celeste non è, in effetti, che il cielo convesso del centro, che appare, invece, all'osservatore, ingrandito, concavo, per quel fenomeno psicologico di cui abbiamo estesamente parlato. Si osservino le « volte del cielo » e il fenomeno del bastimento, che va « dietro l'orizzonte », come sopra diciamo, nella Tav. XVI. La nostra nuova ipotesi sulla propagazione della luce s'accorda, quindi, ugualmente bene della classica con i dati d'osservazione, i quali, insistiamo, sono il risultato di una certa interpretazione psicologica del processo della visione.

Riprendiamo qui, un momento, la misura effettuata da Gauss, che abbiamo esaminato nel cap. IX, parte I. Come già abbiamo accennato, siffatta misura, anche se avesse fornito per la somma degli angoli interni di un triangolo un angolo piatto esatto, non avrebbe affatto provato l'euclideità dello spazio. Anche nel nostro spazio non euclideo i triangoli ottici (tale era il triangolo geodetico di Gauss) forniscono per somma dei loro angoli, a meno degli errori di osservazione, un angolo piatto, dato che la trasformazione, che lega i due spazi, è isogonale. Il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia eguale a un angolo piatto discrimina la geometria euclidea *dalle geometrie non euclidee a curvatura*

costante, ma non da qualsiasi geometria non euclidea a curvatura variabile. È strano che questa circostanza venga trascurata nei testi. Il nostro spazio è *a curvatura variabile,* ed, essendo la nostra trasformazione conforme, ogni misura del tipo effettuato da Gauss non ha alcun valore ai fini di stabilire se lo spazio è euclideo o non euclideo. La chiave di volta sta nell'ammettere una legge di propagazione rettilinea della luce oppure una legge di propagazione curvilinea.

Prima di inoltrarci nello studio dell'aspetto fisico del mondo endosferico, parleremo nel prossimo capitolo dei metodi pratici di trasformazione dovuti al Prof. Morrow, mettendo a confronto, altresì, lunghezze euclidee e le corrispondenti lunghezze non euclidee.

CAPITOLO IV.

Il procedimento d'inversione di Morrow. La chiave geometrica. Spazio fisico e spazio geometrico.

Tangente rettilinea e tangente curvilinea – Chiave geometrica – Trasformazione del raggio della sfera d'inversione e sua applicazione al mondo fisico – Parallelismo euclideo e parallelismo non euclideo, chilometri euclidei e chilometri non euclidei in geometria e nella loro applicazione al mondo fisico.

L'inversione, che abbiamo descritta nel capitolo precedente, potrebbe presentare qualche difficoltà pratica non indifferente, se non disponessimo di un procedimento dovuto al Prof. Morrow.

Questo procedimento, che Morrow chiama « Geometry of Reversion », si distingue dalla « Geometry of Inversion » per il metodo adottato : i risultati sono ovviamente gli stessi. Esso non è che un metodo per costruire, disegnare dei diagrammi. La Geometria d'inversione costituisce la prova della validità e precisione di tale metodo.

L'illustrazione più semplice di detto procedimento la offrono le figure della *tangente rettilinea* e della *tangente curvilinea* (Tav. I.) Si osservi la figura a sinistra con le frecce rivolte verso l'esterno. Supponiamo ora di tagliare materialmente il cerchio nel punto *P'* e di prendere i due estremi del taglio sollevandoli fino a ricongiungerli in alto nel punto *P* : otterremo la figura *rovesciata* (« reversed ») a destra. Ora le frecce sono rivolte verso l'interno, e precisamente verso il centro ; la tangente rettilinea è diventata la tangente curvilinea, un cerchio, cioè, di raggio pari alla metà del raggio del cerchio rovesciato. La tangente curvilinea interseca le frecce sotto gli stessi angoli sotto cui erano intersecate dalla tangente rettilinea.

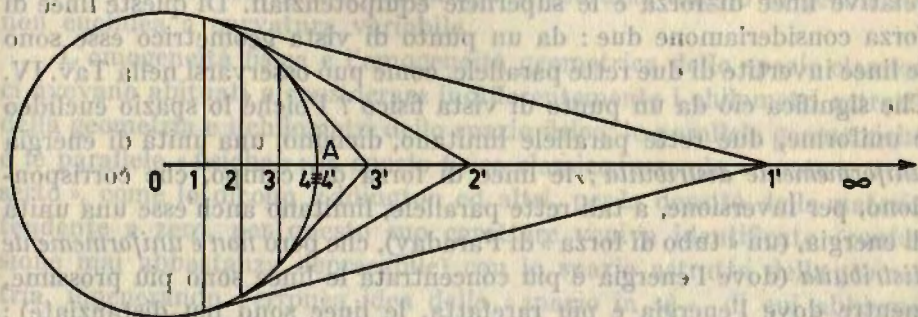
Osserviamo ora la Tav. II. Dato un punto, ricerchiamo il suo corrispondente. Se il punto è interno al cerchio, si conduce per esso una corda perpendicolare al diametro passante per quel punto ; poi, per gli estremi della corda, si conducono le tangenti al cerchio : il punto corrispondente a quello dato è il punto d'intersezione delle due tangenti.

Se il punto è esterno al cerchio, si conducono per esso le tangenti al cerchio: il punto medio della corda che congiunge i due punti di tangenza è il punto cercato. Il punto A è l'inverso di a, B l'inverso di b, ecc. e viceversa. Alla retta per A corrisponde il cerchio di diametro aO; alla retta per B corrisponde il cerchio di diametro bO, ecc.

Dobbiamo ora trovare l'arco corrispondente alla retta a (figura piccola): P è il punto d'intersezione della retta a con il cerchio; conduciamo per il punto medio M del raggio OP la perpendicolare al raggio stesso che interseca in N il prolungamento del diametro perpendicolare alla retta a; con il centro in N e raggio uguale a ON, si descrive l'arco cercato a di estremi O e P. Con questo procedimento sono stati trovati agevolmente i raggi solari curvilinei corrispondenti ai raggi solari rettilinei della Tav. XI, su cui torneremo.

La figura della Tav. III illustra la chiave geometrica, ossia il metodo sintetico per trasformare chilometri di spazio piano in termini o valori di spazio non euclideo a curvatura variabile, senza dover ricorrere alle formule (125). La semiretta $C'B$ è suddivisa in tanti segmenti uguali $\overline{C'1}$, $\overline{1\,2}$, ecc., ciascuno dei quali corrisponde ad una lunghezza di km. 6400, (lunghezza arrotondata per eccesso del raggio terrestre). Le semirette, che si estendono dal centro dei cerchi concentrici ed attraversano la linea verticale ML, proiettano su questa le lunghezze inverse di ciascuno di detti tratti o di multipli di questi. Il trattino $\overline{1\,2}$ proiettato sulla ML si trasforma sul raggio della circonferenza terrestre nella lunghezza $A'B'$. Il doppio trattino $\overline{2\,4}$, corrispondente a 12.800 chilometri (euclidei) dello spazio piano, si trasforma nel tratto $B'C'$ avente anch'esso una lunghezza di 12.800 chilometri (non euclidei) dello spazio curvo, e così via. Si osservi che il tratto $A'B'$, pari a km. 6400 *non* euclidei, è uguale alla metà (euclidea) del raggio terrestre, il tratto $B'C'$, pari a km. 12.800 *non* euclidei, è uguale alla metà (euclidea) di $A'B'$, cioè a $\frac{1}{4}$ del raggio terrestre, e così via. Ogni successiva metà (euclidea) ha il valore di un numero di chilometri *non* euclidei doppio del numero di chilometri *non* euclidei della metà (euclidea) precedente. Alla semiretta (euclidea) uscente da A, estendentesi a destra verso l'infinito, corrisponde, nella trasformazione, il raggio della sfera cava (*non* euclideo). Mentre detta semiretta misura un numero (infinito) di chilometri euclidei, il raggio, che le corrisponde, misura un numero (anch'esso infinito) di chilometri *non* euclidei.

Per importanti considerazioni, che dovremo fare al capitolo VI, diremo ancora: preso un circolo d'inversione C (per comodità ci riferia-

mo ad esso invece che alla sfera d'inversione) consideriamo il suo raggio OA, suddiviso in un numero finito, per es. 4, di parti fra loro uguali; ognuna di queste parti misura uno stesso numero di chilometri *euclidei*. Cerchiamo l'inverso di tale raggio: esso sarà la semiretta (vedi figura)

uscente da A, suddivisa nei segmenti $\overline{A\,3'}$, $\overline{3'\,2'}$, $\overline{2'\,1'}$, $\overline{1'\,\infty}$, *inversi* di quelli considerati su $\overline{AO}$, fra loro disuguali (l'ultimo è *infinito*), pur misurando ognuno lo *stesso* numero di chilometri *non* euclidei; l'intera semiretta misura quindi un numero (finito) di chilometri *non* euclidei uguale al numero (finito) di chilometri euclidei misurati dal raggio OA. Preso il raggio della Terra convessa come OA, il suo inverso, profondità della Terra concava, è la semiretta di origine A, che misura, come il raggio della Terra convessa, 6400 chilometri, tenendo però presente che il raggio della Terra convessa è misurato in chilometri euclidei, e il suo inverso (la semiretta) in chilometri non euclidei. Le suddette costruzioni d'inversione, come abbiamo già dimostrato, sono in perfetto accordo con le formule matematiche (125) della trasformazione circolare.

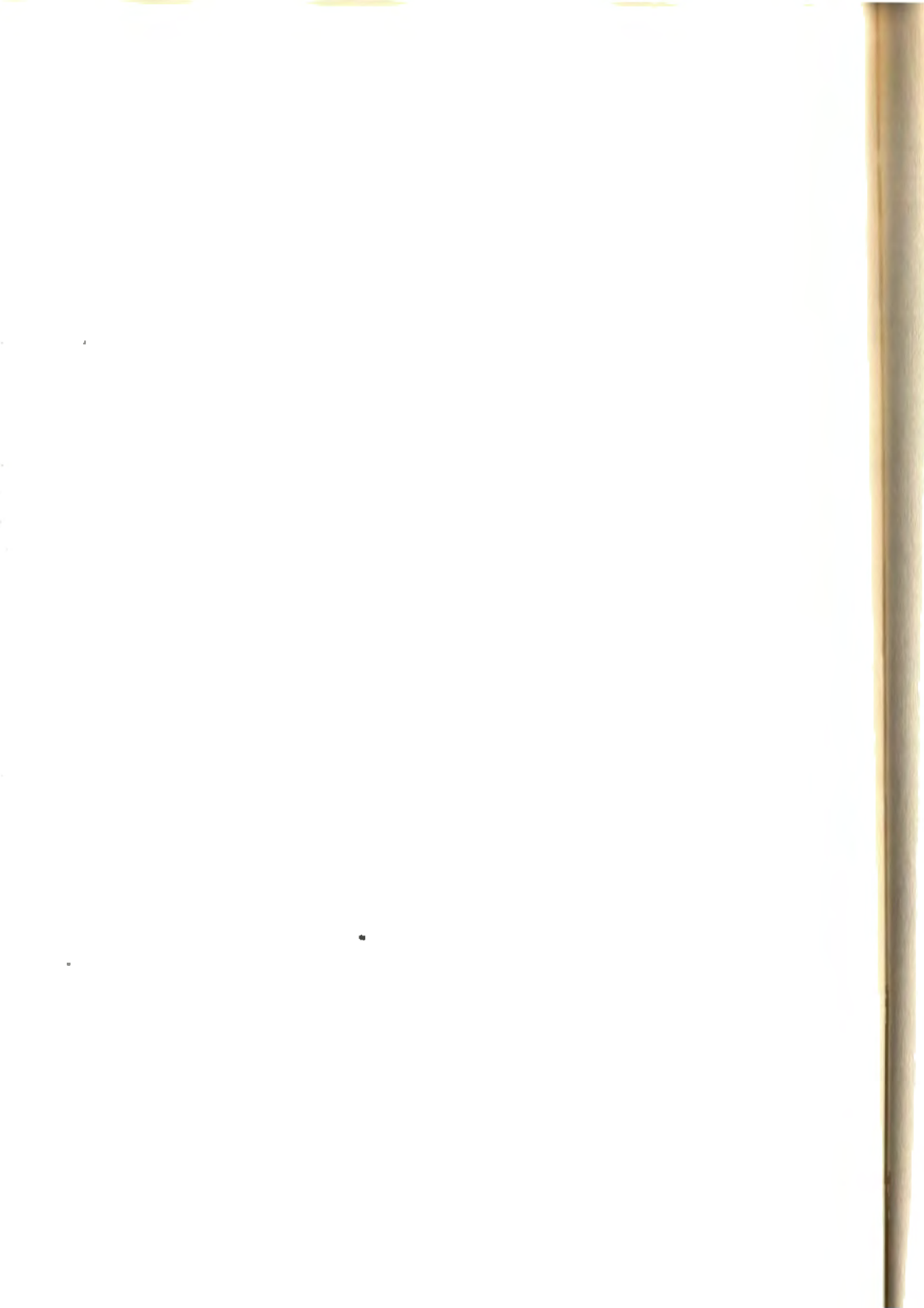
Vogliamo ora precisare, distinguendo il punto di vista geometrico da quello fisico, ciò che deve intendersi per parallelismo euclideo e per parallelismo non euclideo, per chilometri euclidei e per chilometri non euclidei.

La chiave geometrica della Tav. III illustra da *un punto di vista geometrico* il metodo per trasformare chilometri euclidei in chilometri non euclidei. I chilometri euclidei sono rappresentati da segmenti tutti eguali, quelli non euclidei da segmenti via via decrescenti, a misura che si avanza verso il centro della sfera. Nella figura più piccola in alto della stessa Tav. III è rappresentato lo spazio endosferico *fisico*: questo spazio non è che il campo cui si è accennato nel capitolo precedente. Come avremo modo di analizzare meglio nel cap. VI, osserviamo subito che

il mondo copernicano della Tav. XIV, invertito, presenta la configurazione della Tav. XV, la quale non è che la configurazione di un campo, la stessa, cioè, del disegno della Tav. I, che rappresenta il campo magnetico (o elettrico) con i due poli magnetici (o cariche elettriche), le relative linee di forza e le superficie equipotenziali. Di queste linee di forza consideriamone due : da un punto di vista geometrico esse sono le linee invertite di due rette parallele, come può osservarsi nella Tav. IV. Che significa ciò da un punto di vista fisico ? Poichè lo spazio euclideo è uniforme, due rette parallele limitano, diciamo, una unità di energia *uniformemente distribuita ;* le linee di forza del campo, che corrispondono, per inversione, a tali rette parallele, limitano anch'esse una unità di energia, (un « tubo di forza » di Faraday), che però *non è uniformemente distribuita* (dove l'energia è più concentrata le linee sono più prossime, mentre dove l'energia è più rarefatta, le linee sono più distanziate) : ciò significa che da un punto di vista *fisico* le due linee di forza sono « parallele ». Possiamo dire allora : a due rette dello spazio classico, parallele sia da un punto di vista geometrico (euclideo) che da un punto di vista fisico (distribuzione uniforme dell'energia) corrispondono due linee dello spazio endosferico, parallele sia da un punto di vita geometrico (non euclideo) che da un punto di vista fisico (distribuzione non uniforme dell'energia). L'energia compresa fra due rette parallele euclidee è *quantitativamente* la stessa dell'energia compresa fra due rette parallele non euclidee. Analogamente diremo : i chilometri euclidei sono rappresentati da segmenti *uguali,* perchè, essendo applicati allo spazio fisico classico ove l'energia *è uniformemente distribuita,* ciascuno di essi deve rappresentare una quantità di energia *costante.* La geometria euclidea, pertanto, è quella meglio coordinabile con lo spazio fisico esosferico (distribuzione uniforme dell'energia). I chilometri *non* euclidei sono rappresentati da archetti o segmenti *disuguali,* perchè, essendo applicati allo spazio fisico del campo endosferico ove l'energia *non è uniformemente distribuita,* ciascuno di essi deve rappresentare una quantità di energia *costante.* La geometria non euclidea a curvatura variabile è quella, quindi, meglio coordinabile con lo spazio fisico endosferico (distribuzione *non* uniforme dell'energia).

Dire che le distanze euclidee dello spazio classico sono *numericamente* uguali alle distanze *non* euclidee dello spazio endosferico, significa che entrambe le distanze rappresentano una *uguale* quantità di energia (sia i chilometri euclidei che quelli non euclidei rappresentano ciascuno una stessa quantità di energia).

Nella Parte I abbiamo insistito sul fatto che la Geometria non va confusa con la Fisica. Applichiamo ai fenomeni fisici (allo spazio fisico) la geometria che meglio può essere ad essi coordinata. Allo spazio fisico omogeneo si applica soddisfacentemente la geometria euclidea, allo spazio fisico non omogeneo del campo si coordina meglio la geometria non euclidea a curvatura variabile.

L'omogeneità fisica e l'omogeneità geometrica dello spazio classico ci avevano abituati a considerare indifferentemente i chilometri astratti della geometria e i chilometri dello spazio fisico, le parallele geometriche e le parallele « fisiche » ; lo spazio fisico classico, essendo « vuoto », « deserto », come lo dicono Eddington ed altri, per la densità della materia tendente a zero, per questo suo carattere veniva identificato (confusione mai abbastanza deprecabile) con lo spazio astratto della geometria, ingenerando l'erronea idea dello « spazio in sè », di cui abbiamo trattato a lungo nella Parte I. Nel nuovo concetto, la distanza, *in senso fisico*, acquista un chiaro significato non appena si distingua, come devesi distinguere, fra Geometria e Fisica, fra strumento astratto ed ente concreto. Dire che, come nel concetto classico, anche nel mondo endosferico il Sole dista dalla Terra circa 150.000.000 di chilometri significa che il numero di unità di energia (facendo corrispondere ad ogni chilometro *una unità* di energia, ora estremamente concentrata, ora concentrata, ora poco o molto rarefatta) è appunto di 150.000.000, così come sono 150.000.000 le unità di energia (estremamente ed *uniformente* rarefatte) quelle che separano il Sole dalla Terra «convessa». In questo senso, ripetiamo ancora, le distanze calcolate dall'astronomia classica sono *numericamente* uguali a quelle della nuova concezione del mondo.

CAPITOLO V.

I movimenti rigidi dello spazio esosferico e i movimenti non rigidi dello spazio endosferico.

Spazio esosferico omogeneo e isotropo e spazio endosferico non omogeneo e non isotropo – Moto rigido e moto non rigido – Eddington: La costante cosmica, il metro campione assoluto dello spazio piano e il metro, sottomultiplo del raggio di curvatura *locale*, dello spazio a curvatura variabile – Einstein e i moti non rigidi del campo gravitazionale.

Abbiamo esposto nei capitoli precedenti la trasformazione per raggi vettori reciproci e un particolare procedimento per effettuare sinteticamente tali trasformazioni. Ora dobbiamo esaminare alcuni aspetti molto notevoli del problema.

Nella nostra trasformazione, dunque, i chilometri euclidei, rappresentati mediante segmenti *uguali fra loro*, data l'omogeneità e l'isotropia dello spazio, si mutano in chilometri *non* euclidei rappresentati da archetti o segmenti *fra loro disuguali*. I chilometri esosferici si mutano in chilometri endosferici, che, secondo la legge (125), vanno via via contraendosi, a misura che ci si avvicina al centro della sfera. I chilometri endosferici hanno tutti lo stesso numero di metri, ma il metro, o unità di misura campione, non è assoluto, ma muta da punto a punto, da direzione a direzione, da giacitura a giacitura. Un corpo che si sposti ha sempre lo stesso numero di atomi, e gli atomi hanno tutti le stesse dimensioni, ma le dimensioni dell'atomo sono calcolate in base a una unità di misura che muta da punto a punto, da direzione a direzione, da giacitura a giacitura; i movimenti dei corpi quindi non sono rigidi: essi, a seconda che si approssimino o si allontanino dal centro della sfera, si contraggono o si dilatano. I due spazi, uno euclideo e l'altro non euclideo a curvatura variabile, trasformabili l'uno nell'altro mediante la legge (125), si distinguono particolarmente in questo: il primo è rigido (i moti dei corpi sono in esso rigidi), mentre il secondo non è rigido (i moti dei corpi non sono rigidi). Riportiamo qui, a questo proposito,

quanto scrive Eddington (29, *a* ; 123) : « Ogni lunghezza è relativa. Questo è uno dei principî della teoria di Einstein, che è divenuto ormai un luogo comune della fisica. Ma quella relatività, che Einstein considerava, era lungi dall'essere elementare ; secondo lui, la lunghezza è relativa a un sistema di riferimento, che si muova con l'osservatore, cosicchè, valutata da un osservatore, che si muova con una data stella, non risulta esattamente uguale a quella valutata da un osservatore, che si muova con un'altra stella. Ma, oltre a questo, l'asserto che la lunghezza è relativa ha un altro senso molto evidente. La misura di una lunghezza implica sempre il paragone con una lunghezza campione: cosicchè ogni lunghezza è relativa a quella. Quel che è accessibile alla nostra esperienza è solo un rapporto di estensioni. Supponiamo che ogni lunghezza del nostro universo venga ad essere raddoppiata : nulla sarà cambiato nella nostra esperienza. Non si riesce nemmeno ad attribuire un senso preciso a un tale supposto cambiamento. Non resta che un insieme vuoto di parole, come se una conferenza internazionale venisse a decretare che la sterlina varrà d'ora in poi due sterline, il dollaro due dollari, la lira due lire e così via.

Nei « Viaggi di Gulliver » i Lillipuziani erano alti circa quindici centimetri, i loro alberi più alti raggiungevano i due metri, gli animali, le case, le città erano grandi in proporzione. A Brobdingnag la gente era grande come i nostri campanili, il gatto sembrava tre volte più grande di un bue, il grano raggiungeva i dieci metri. Intrinsecamente Lilliput e Brobdingnag erano esattamente lo stesso ; era proprio questo il principio sul quale Swift aveva costruito il suo racconto. Ci voleva un Gulliver venuto da fuori — un campione di lunghezza estraneo — perchè venisse rilevata la differenza.

Si suol ripetere in fisica che tutti gli atomi di idrogeno allo stato normale hanno le stesse dimensioni o lo stesso raggio d'azione della loro carica elettrica. Ma che cosa intendiamo con ciò ? O, per metter la questione nella forma inversa, che cosa significherebbe il dire che due atomi di idrogeno sono di dimensioni diverse, simili in quanto a struttura, ma costruiti su scala diversa ? Si ripeterebbe il caso di Lilliput e Brobdingnag : per dare un significato alla diversità, ci occorre un Gulliver. Il Gulliver della fisica è un certo regolo di platino, custodito a Parigi, che si chiama il Metro Internazionale. Tuttavia tale sbarra metrica non è il vero Gulliver, perchè non viaggia. Il vero Gulliver deve possedere l'ubiquità.

Non è difficile trovare questo campione che abbia le virtù d'ubiquità. In fondo, Einstein ci ha già detto quale è, quando ci ha dato la

legge di Gravitazione $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, dove λ è la cosidetta *costante cosmica.* Anni fa ho mostrato che questa legge poteva esprimersi nella forma seguente: " Quello che chiamiamo un metro in un luogo e in una direzione dati qualunque, è una frazione costante $\sqrt{\frac{1}{3}\lambda}$ del raggio di curvatura dello spazio-tempo per quel luogo e per quella direzione ". In altre parole, il metro non è che un sottomultiplo, comodo all'uso pratico, del raggio di curvatura nel posto considerato; cosicchè misurare in metri equivale a misurare in termini del raggio di curvatura.

Il raggio di curvatura dell'Universo è il vero Gulliver. Ha il dono dell'ubiquità. Ovunque, il raggio di curvatura esiste come termine di paragone a indicare, se esistono, differenze del genere di quelle che Gulliver scoprì fra Lilliput e Brobdingnag. Se più ci piace, possiamo usare il metro suo sottomultiplo, tenendo però presente che il metro ha l'ubiquità solo in quanto è sottomultiplo di detto raggio: e dovremmo sforzarci a dimenticare che in certe località ci è avvenuto di cristallizzare questo metro in forma di sbarre metalliche per comodità pratica.

E adesso possiamo dare un senso diretto all'enunciazione che due atomi normali di idrogeno in qualunque parte dell'universo hanno la stessa dimensione. Quello che vogliamo dire è che la dimensione di ciascuno di essi è la stessa frazione del raggio di curvatura dello spazio-tempo nel luogo in cui si trova. L'atomo, qui, è una certa frazione del raggio qual'è qui, e l'atomo in Sirio è la stessa frazione del raggio qual'è in Sirio. Sapere se la lunghezza del raggio qui è assolutamente identica a quella del raggio in Sirio non ha importanza: e, in verità, credo che un paragone simile sarebbe privo di significato. Noi diciamo che è sempre lo stesso numero di metri: ma col dir ciò non significhiamo nulla di più di chi dicesse che il metro ha sempre lo stesso numero di centimetri.

Così appare che in tutte le nostre misure noi non facciamo altro che paragonare lunghezze e distanze col raggio di curvatura qual'è localmente. Purchè si accetti la legge di gravitazione, questa non è una ipotesi: *è la traduzione della legge da simboli in parole.* Non è soltanto una indicazione del modo ideale di misurare le lunghezze, ma rivela le basi del sistema che abbiamo effettivamente adottato, o a cui si riferiscono le leggi meccaniche ed ottiche, che si usano nelle misure pratiche e nelle triangolazioni.

Non è difficile vedere come avviene che il nostro campione pratico (la sbarra metrica) sia la cristallizzazione del campione ideale, cioè del

raggio di curvatura, o di un sottomultiplo di esso. Dato che il raggio di curvatura è l'unità cui si riferiscono le equazioni fisiche fondamentali, qualunque cosa, la cui estensione sia determinata da equazioni fisiche costanti, avrà una lunghezza costante in termini di quell'unità. Così è che la teoria fisica, la quale fa sì che l'atomo normale d'idrogeno abbia le stesse dimensioni in termini del raggio di curvatura, dovunque esso si trovi, farà anche sì che una sbarra solida in uno stato ben specificato abbia la stessa dimensione in termini del raggio di curvatura, dovunque sia. Il fatto che l'atomo abbia dimensioni costanti in termini del metro comune non è che un caso particolare della regola : " cose che stanno in rapporto costante alla medesima cosa stanno in rapporto costante fra di loro ".

Le notevoli considerazioni di Eddington sembrano scritte per illustrare il nostro nuovo concetto del mondo. Nel concetto endosferico i corpi celesti non hanno volumi numericamente diversi da quelli calcolati nello spazio esosferico, con la seguente precisazione però : mentre nello spazio endosferico misuriamo i corpi celesti in base a un metro campione, che è sottomultiplo del raggio di curvatura *locale*, cioè del luogo ove trovansi gli oggetti celesti da misurare, nello spazio esosferico uniforme, invece, non ha senso parlare di *metro locale*, perchè in esso, in ogni punto, e in ogni direzione, il raggio di curvatura è infinito, e, pertanto, i corpi celesti si misurano mediante la sbarra metrica, detto Metro Internazionale, che è, per la sua indipendenza dal luogo ove si misura, una lunghezza assoluta.

Circa questo spazio uniforme, scrive ancora Eddington (29, *a* ; 130) : « Lo spazio piano, essendo privo di caratteristiche, non contiene in sè quanto è necessario per valutare lunghezze e dimensioni, cioè un termine di paragone dotato di ubiquità. Ma a che serve lo spazio se esso non adempie alle sue funzioni, che consistono nel costituire uno schema di riferimento per tutte quelle relazioni fisiche — lunghezza, distanza, grandezza — che vanno sotto il nome di spaziali ? Se non può costituire un sistema di riferimento per la lunghezza, non gli si addice più il nome di " spazio ". Qualunque sia la definizione accettata dal geometra puro, il fisico deve *definire* lo spazio come qualche cosa che sia caratterizzato in ogni punto da una grandezza intrinseca che può essere usata come base per la misura delle dimensioni degli oggetti ivi collocati... Lo spazio fisico non può esser privo di caratteristiche. In terminologia geometrica, le caratteristiche dello spazio sono designate come curvature ».

Quanto andiamo dicendo, quindi, circa il nostro spazio endosferico e quello esosferico (il primo dotato di caratteristiche, il secondo no) è stato già oggetto di riflessione da parte di Eddington, il quale confrontava con lo spazio piano lo spazio non euclideo a curvatura variabile del mondo einsteiniano. « Il campo gravitazionale, scrive Einstein (30, *b* ; 240) deforma i miei regoli rigidi ». Abbiamo già osservato, tuttavia, che, mentre lo spazio non euclideo di Einstein ha una portata notevole in sede teorica, ma trascurabile in quanto alla sua effettiva differenza dallo spazio piano, lo spazio endosferico non euclideo ha, anche per quest'ultimo riguardo, grande portata, perchè ivi le curvature sono via via più accentuate, a misura che ci si avvicina al centro cosmico, fino a diventare infinite. Altre considerazioni faremo in proposito, nel cap. XII.

Riassumendo diremo che i movimenti rigidi sono propri di uno spazio privo di caratteristiche qual'è quello euclideo, mentre i movimenti non rigidi sono propri di uno spazio non euclideo a curvatura variabile qual'è quello da noi considerato, nel quale i corpi, muovendosi, non mutano *numericamente* le loro dimensioni ; muta però l'unità di misura rispetto a cui i corpi sono misurati, essendo tale unità di misura un sottomultiplo del raggio di curvatura *locale*, cioè del posto occupato dal corpo, istante per istante, durante il suo moto. Un osservatore, che seguisse il corpo in moto, non potrebbe in nessuna maniera verificare diffatte contrazioni o dilatazioni, poichè anch'egli, insieme con i suoi strumenti di misura, sarebbe soggetto alle stesse leggi cui è soggetto tale corpo. L'universo endosferico è uno spazio che, per il fatto di essere dotato di caratteristiche, anche per autorità scientifiche della statura di Arthur Eddington, è assai più plausibile dello spazio piano della Teoria classica.

CAPITOLO VI.

La gravitazione Universale.

Gli elementi dell'atomo, loro dimensioni e loro mutue distanze – Armellini: Rarità della materia nell'Universo classico – La densità della materia nell'Universo endosferico – Antares e i « Soli » del mondo copernicano – Configurazione endosferica e configurazione esosferica del Sistema Solare – L'« orbita terrestre » – La repulsione cosmica della Teoria della Relatività – L'« attrazione terrestre » e la repulsione solare – Calcolo della *velocità di fuga* – Validità della legge di Newton – Variazione dell'accelerazione di gravità *g* – Le maree.

Potrei esser racchiuso in un guscio di noce, e pur credermi re dello spazio infinito.

AMLETO

L'immagine fisica del mondo, come ama chiamarla Planck, cioè il mondo quale ce lo rappresenta la scienza fisica, ha il suo cardine fondamentale nella celebre legge di gravitazione di Isaac Newton.

L'astronomia moderna ha fornito una spiegazione adeguata di numerosi fenomeni celesti. I moti, i periodi e le fasi dei pianeti sono stati ricondotti alla precisione caratteristica dei metodi matematici. È stata determinata la velocità della luce, è stata scoperta la causa della precessione degli equinozi; sono state spiegate le eclissi e sono state individuate le orbite di numerose comete; i pianeti sono stati « pesati » e la loro forza d'attrazione è stata accertata mediante l'applicazione della legge di Newton; i principî di prospettiva, applicati ai fenomeni celesti, consentono i calcoli di distanze dei corpi siderei in base agli angoli parallattici conosciuti.

I successi della scienza astronomica sono innumerevoli e sorprendenti. In epoca recentissima (ottobre 1959) è partito dalla Russia un razzo a più stadi, l'Orbitnik I, che ha girato attorno alla Luna, fotografandone la faccia « nascosta ».

Il nuovo concetto endosferico non implica ovviamente alcuna modificazione dei fatti accertati, delle deduzioni e dei principî sviluppati

dall'Astronomia matematica, ma ha lo scopo di presentare il concetto di una diversa struttura dello spazio. La Teoria Endosferica non distrugge ciò che è stato già stabilito con i risultati positivi universalmente noti, ma offre un contributo per un ulteriore progresso della scienza.

Nello spazio endosferico, dunque, *le relazioni osservate* rimangono le stesse. Numerose spiegazioni dei fenomeni cosmici sono esattamente eguali a quelle fornite dal concetto classico : le due immagini del mondo danno luogo ad identici risultati geometrici e fisici. I moti e le relazioni osservate si svolgono però in un differente spazio, in differenti condizioni spaziali. Lo spazio, nelle alte regioni celesti, è intensificato, nel senso che il campo di cui subito parleremo, è via via più intenso ; la materia dei corpi celesti è più densa che nello spazio esosferico. In uno spazio « più piccolo » anche gli atomi si riducono senza che mutino tuttavia i loro rapporti e le loro attività. Gli atomi, e quindi i corpi, spostandosi dallo spazio terrestre a quello celeste, si contraggono, accrescendo la loro densità : i loro movimenti, d'accordo con la natura dello spazio non euclideo a curvatura variabile, non sono rigidi. Giova ricordare, per l'attendibilità di quanto stiamo dicendo, che la materia che si trova sotto la nostra ordinaria osservazione è ben lungi dall'essere compatta. L'atomo è costituito da un nucleo e da elettroni che ruotano attorno ad esso. L'elettrone è una particella di tutt'altro ordine di grandezza rispetto all'atomo. Dalla teoria cinetica dei gas segue che l'atomo di qualsiasi elemento ha il raggio dell'ordine di 10^{-8} centimetri ; quello dell'elettrone è 50.000 volte più piccolo (raggio dell'elettrone = $1,8 \cdot 10^{-13}$ centimetri) ; il raggio del nucleo atomico dell'oro è minore di $4 \cdot 10^{-12}$ cm., quindi almeno 10.000 volte più piccolo, di quello del suo atomo : siamo press'a poco nel rapporto che corre tra il raggio della Terra e quello della sua orbita attorno al Sole (20 ; 120 e 290).

Abbiamo visto nel cap. I di questa terza parte come Armellini rileva *la rarità della materia nell'Universo*. In termini tutt'altro che rigorosi mi sia lecito esprimermi così : il « vuoto » è enormemente maggiore del « pieno », sia nello spazio astronomico che in quello atomico. Si può comprendere così come alcuni fisici abbiano calcolato che, se tutti gli atomi della massa terrestre fossero compressi fino a « non lasciare vuoti », il volume della Terra si ridurrebbe a quello di un'arancia ! È stato calcolato altresì che l'effettiva materia di qualsiasi corpo non è maggiore della trilionesima parte dell'un per cento del suo totale volume apparente !

La massa dei corpi celesti, dunque, è quantitativamente la stessa sia nel mondo classico che in quello endosferico : ciò che muta è la loro densità. Precisiamo questo fatto. Nella Tav. VII si osservi l'inversione di figure : in termini euclidei il volume della sfera di centro F' si riduce, nell'inversione, in quello della sfera di centro F. Poichè la densità è data dal rapporto della massa al volume, rimanendo costante la massa, al decrescere il volume, cresce la densità. Si potrebbe obiettare che i volumi, calcolati con unità di misure non euclidee, *numericamente*, nell'inversione, risultano uguali a quelli calcolati nel mondo esosferico in termini euclidei, e che, quindi, «non dovrebbero mutare nemmeno le densità». A questo si risponde, ricordando quanto abbiamo detto nel Cap. IV, che l'eguaglianza numerica non implica necessariamente l'eguaglianza fisica : che la prima sussista non esclude affatto che la materia, estremamente rarefatta nel mondo esosferico, risulti enormemente compatta in quello endosferico. Gli astri, nel sistema cosmocentrico, hanno pertanto densità estremamente elevate. I quattro grandi pianeti, Giove, Saturno, Urano e Nettuno, che, nella Teoria classica, hanno densità tanto basse da doversi immaginare come dei palloni gonfi d'acqua o quasi, nel sistema cosmocentrico hanno elevatissime densità. Cade pertanto la circostanza giustamente rilevata da Armellini, come abbiamo visto nel cap. I, di una Terra «più densa di tutti i corpi del sistema solare (Sole compreso)», circostanza puramente accidentale nel sistema classico, dove la Terra è un «pianeta qualunque», privo di qualsiasi privilegio. Nel nuovo concetto la Terra ha la *densità più bassa* rispetto a *tutti* i corpi celesti, presentandosi questo fatto, non più come una circostanza casuale, ma come una naturale e logica conseguenza della struttura dell'Universo.

Nel mondo classico vi sono stelle di densità quasi nulla : per es., Antares, che ha un diametro maggiore di quello dell'orbita di Marte (456 milioni di chilometri), ha una densità circa due mila volte minore della densità dell'aria e una velocità radiale di avvicinamento di 3 km. al secondo. Per renderci appena conto di ciò che significhi siffatta densità, si pensi, ad es., che l'acqua è circa otto volte meno densa del ferro; che l'aria è circa mille volte meno densa dell'acqua : si pensi ora a un corpo di densità 2000 volte minore di quella dell'aria ! Immaginare questo colossale globo con una consistenza confrontabile con il vuoto, in rapido moto negli spazi, implica, per certo, sensibili difficoltà ! Nel cielo classico vi è di più : vi sono ammassi stellari composti da milioni di «Soli» con densità dell'ordine di 10^{-21} (20 corpuscoli, atomi ed elet-

troni liberi, per ogni centimetro cubo), vi sono globi gassosi di gigantesche dimensioni (con diametri migliaia di volte superiori alla distanza Terra-Sole), animati da velocità di decine di migliaia di chilometri al secondo. Nell'Universo endosferico si hanno, invece, astri estremamente densi e velocità riferite a unità di lunghezza locali (Cap. V). Le stelle si accumulano al centro dell'Universo, come subito vedremo, costituendo l'immensa fonte di energia capace d'irradiare sulla Terra le colossali quantità di raggi cosmici, la cui *simmetria* di caduta non costituisce più una « strana combinazione », come osserva Eddington, ma una circostanza normale, che, se fosse ancora da scoprire, potremmo logicamente prevedere.

Vediamo ora in quali termini la legge di Newton conserva la sua piena validità nel mondo endosferico.

Mediante la legge (125), trasformiamo la configurazione classica del sistema solare. Nella Tav. XIV è rappresentato il sistema eliocentrico fino all'orbita di Giove. Le orbite ellittiche, dato il piccolo valore delle relative eccentricità, sono assimilate a cerchi; le grandezze del Sole e dei pianeti non sono proporzionali a quelle reali. Prendiamo come circolo d'inversione il cerchio tratteggiato, di raggio uguale alla metà della distanza Terra-Sole; esso s'interseca con l'orbita terrestre nei punti 11 e 1. La Tav. XV ci mostra il risultato della trasformazione. Per ragioni di chiarezza il circolo d'inversione è stato ampliato: esso è anche qui tratteggiato e s'interseca con l'« orbita della Terra » nei punti 11 e 1 (che, per una piccola imperfezione del disegno, appaiono leggermente spostati). Per non ripeterci, chiamiamo E la configurazione eliocentrica della Tav. XIV e C la configurazione cosmocentrica, trasformata di E, della Tav. XV. L'« orbita terrestre », il cerchio 11,...1, passante, in E, per il centro d'inversione, si è trasformata in C nell'« orbita annuale » rettilinea 11, ...1, di cui parleremo nel prossimo capitolo. Il punto 12, coincidente con il centro d'inversione, si è mutato, in C, nel punto all'infinito di detta « orbita » *rettilinea*. Le orbite circolari dei pianeti si mutano ancora in orbite circolari; i raggi rettilinei del Sole si mutano in cerchi, con eccezione di quello che passa per il centro d'inversione e che si muta, pertanto, in se stesso. Detti raggi solari, che, in E, sono semirette che vanno all'infinito (verso le stelle e i cumuli stellari esistenti in ogni direzione a distanze di miliardi di miliardi di chilometri), in C convergono nel centro d'inversione, che, nella trasformazione, corrisponde ai punti all' ∞: pertanto tale centro lo chiameremo *Centro Stellare*. Le linee rette tratteggiate uscenti dal centro d'inversione si mutano in se stesse. Gli angoli formati dalle intersezioni

fra raggi, orbite, ecc., nella trasformazione rimangono invariati. Osserviamo ora nella Tav. I la rappresentazione di una carica elettrica con relativo campo e relative linee di forza elettrica e superficie equipotenziali, così come la rappresentazione di due poli magnetici (o cariche elettriche) con relativo campo magnetico (o elettrico) e relative linee di forza magnetica (o elettrica) e superficie equipotenziali. Sono rappresentazioni notissime, che si trovano in tutti i testi di elettrologia. Ora, mentre troviamo in *E* una configurazione analoga a quella dianzi considerata, con il Sole che origina il campo, con le relative linee di forza rettilinee e le concentriche superficie equipotenziali (dove girano i pianeti), riconosciamo, nella figura trasformata *C*, la configurazione di un campo con il Sole (carica positiva) e il Centro Stellare (carica negativa), con le relative linee di forza, che vanno dal Sole al Centro Stellare, e le superficie equipotenziali ad esse ortogonali (dove girano i pianeti). A proposito delle Aurore Boreali Carlson scrive (19 ; 449) : « Il Sole emana torrenti di elettroni ». Questo fatto, e non solo questo, conduce ad attribuire al Sole, fra gli altri caratteri, quello di un corpo elettrizzato.

La rappresentazione *C*, dunque, mostra l'Universo nella configurazione di un campo, di cui, nel cap. III, avevano formulata l'ipotesi, in virtù di particolari considerazioni. Le onde elettromagnetiche (visibili e non visibili) uscenti dal Sole percorrono le linee di forza di tale campo, che sono le *geodetiche* del mondo trasformato. E poichè la curvatura di tali geodetiche non è costante, ma si accentua a misura che ci si avvicina alle sorgenti del campo, si ha uno spazio non euclideo a curvatura variabile. La legge di propagazione rettilinea della luce dello spazio classico cede il posto alla legge di propagazione curvilinea del nuovo spazio ; alla tangente rettilinea subentra la tangente curvilinea, come può vedersi nella Tav. XI, su cui torneremo.

I due spazi, quello esosferico e quello endosferico, per la relazione, che li lega, per la corrispondenza puntuale biunivoca, che fra di essi intercede, si equivalgono. I due sistemi, quello classico e quello cosmocentrico, sono ugualmente consistenti se considerati ciascuno nei propri relativi termini ; si urta contro il più elementare buon senso non appena si pensi all'uno nei termini dell'altro. Le relazioni definite in uno dei due sistemi comportano corrispondenti reciproche relazioni nell'altro. Se ad uno dei due sistemi si riconosce validità e consistenza, dobbiamo aspettarci analoga validità e consistenza nell'altro. Pertanto le relazioni, le equazioni, con i loro sviluppi, che costituiscono quel solido edificio, che porta il nome di Meccanica Celeste e che, per i sorprendenti successi

ottenuti, sembravano confermare, in modo «certo», l'immagine fisica del mondo classico, a causa di detta equivalenza, confermano, in modo altrettanto certo, la struttura del mondo endosferico.

Preciseremo subito, con un calcolo effettivo, questo uso delle medesime formule applicate ai due tipi di spazio, purchè alle grandezze, che in esse figurano, si attribuisca il significato che loro compete, a seconda del tipo di spazio, cui sono riferite. I valori ottenuti, applicando nei calcoli quelle formule, sono *numericamente* identici sia se riferiti al mondo esosferico sia a quello endosferico.

Vi è tuttavia una notevole circostanza da rilevare. Nella Teoria Endosferica la Terra non è un pianeta, ma può assimilarsi, estrapolando, a una sfera cava omogenea (o a una serie di strati concentrici omogenei) in cui è racchiuso l'intero Universo. Poichè all'interno di una sfera cava omogenea il campo gravitazionale è nullo, come spiegheremo il fatto che i corpi *cadono* sulla Terra, che vengono «attratti» dalla Terra?

Nel capitolo III (Parte II) abbiamo parlato di una forza, detta *repulsione cosmica*, introdotta, in via d'ipotesi, da Einstein, allorchè trovò che nessuna fra le soluzioni delle sue equazioni matematiche ammetteva l'esistenza di un cosmo statico. L'Universo statico si aveva quando attrazione e repulsione si facevano equilibrio; se l'attrazione superava la repulsione si aveva un Universo in contrazione; se la repulsione superava l'attrazione si aveva un Universo in espansione. È interessante rilevare, incidentalmente, come già Empedocle avesse concepito l'esistenza del cosmo, come una specie di equilibrio dinamico tra le forze di attrazione e quelle di repulsione. Einstein, Friedman, Eddington ed altri hanno ammesso, pertanto, l'esistenza di due forze opposte, attrazione e repulsione, agenti fra le masse; a ciò, ripetiamo, furono indotti da difficoltà connesse con la soluzione delle equazioni gravitazionali della Teoria Generale della Relatività. La *forza di repulsione* è stata supposta indipendente dalla massa e direttamente proporzionale alla distanza fra i corpi interagenti. L'introduzione di detta forza di repulsione non urta, d'altra parte, contro il carattere dialettico della natura, che sembra rivelarsi in fenomeni dialettici fra gli opposti come *l'azione e la reazione* della III legge della Dinamica, *l'attrazione e la repulsione in campo atomico fra cariche elettriche* di segno rispettivamente opposto od eguale; persino nella fisica nucleare abbiamo dovuto supporre forze di attrazione e di repulsione. Non diremo nulla di nuovo, pertanto, da un punto di vista concettuale, se formuleremo un'ipotesi simile, cioè se introdurremo anche noi, accanto alla nota forza di attra-

zione, una forza di repulsione. Preciseremo così la nostra ipotesi: le due forze coesistono costantemente, con prevalenza della forza di attrazione in vicinanza della massa attraente; tale prevalenza si va attenuando, a misura che ci si allontana da detta massa, fino ad annullarsi; superata la zona di equilibrio, ha prevalenza la forza di repulsione (questa prevalenza si accresce a misura che cresce la distanza). I corpi *cadono* sulla Terra non per effetto dell'« attrazione terrestre » (nei punti interni di uno strato sferico omogeneo, abbiamo ricordato, il campo è nullo) ma per effetto della *repulsione solare.* Questa spiegherebbe, fra l'altro, il fatto che la « forza di gravità », sia presso masse montuose, sia sugli oceani, si mantiene praticamente pressochè uniforme, come verificarono alcuni scienziati inglesi il secolo scorso; ma di ciò parleremo nel cap. XII.

Dal fatto che gli effetti sulla Terra, o ammettendo l'attrazione terrestre o ammettendo la *repulsione solare,* sono identici, consegue che risulta ancora formalmente valida la legge di Newton, che fornisce la forza $F = f\,\frac{m}{r^2}$, con cui l'unità di massa, collocata sulla superficie terrestre, viene « attratta » dalla Terra. Nell'interpretazione classica r è la misura del raggio della Terra convessa eguale, in media, a 6370 chilometri euclidei. Nell'inversione, tale raggio, come abbiamo visto nel capitolo IV, si trasforma in una semiretta, profondità della Terra concava, che misura ancora il numero *finito* r di chilometri *non euclidei.* La meccanica classica ricavava il valore m della massa terrestre in $5{,}97 \cdot 10^{27}$ grammi-massa, uguagliando il valore del peso g dell'unità di massa sulla superficie terrestre, fornito dall'esperienza, alla forza newtoniana, scrivendo cioè

$$(23) \qquad g = f\,\frac{m}{r^2} \qquad \text{da cui} \qquad m = \frac{r^2 g}{f}$$

Identico valore per m si ottiene ovviamente nel nuovo concetto, attribuendo però ad r il significato di chilometri non euclidei, alla forza newtoniana il significato di *repulsione solare* e ad m il significato di massa, perchè, come risulta dalle (23), tali sono le sue dimensioni, con la considerazione che detta massa, di profondità pari a r chilometri non euclidei, ha una densità che va attenuandosi fino a tendere a zero.

Passiamo ora al calcolo della *velocità di fuga,* ossia della velocità che deve assumere un grave per abbandonare definitivamente la superficie terrestre, perchè possa, cioè, uscire dalla « gravitazione » terrestre.

Per lo studio dello spazio cosmico, in particolare dell'intensità dei raggi cosmici, della radiazione corpuscolare del Sole, delle particelle meteoritiche, della faccia «nascosta» della Luna, ecc. ecc., sono stati lanciati, in tempi recenti, vari Pioneer, Explorer, Sputnik e Lunik, con successi che rimarranno memorabili per tutte le generazioni future. A parte le immense difficoltà tecniche, superate dall'avanzatissima scienza russa ed americana, il calcolo esatto della velocità di fuga ha costituito un elemento essenziale per siffatti esperimenti.

La forza newtoniana esercitata sulla massa m_1 di un grave situato *sulla* superficie terrestre è data da $F = f\,\dfrac{m\,m_1}{r^2}$; quella esercitata sulla massa m_1 situata a distanza x dalla superficie terrestre è data da $F' = f\,\dfrac{m\,m_1}{(r+x)^2}$. Per la (23) si ha

$$f\,m = r^2 g\ , \tag{129}$$

quindi,

$$F' = \frac{m_1\, g\, r^2}{(r+x)^2}\ . \tag{130}$$

Il *principio della conservazione dell'energia* si può scrivere $\Delta E = L$, cioè la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro $T_1 - T_2 = L$, essendo T_2 l'energia cinetica posseduta dal grave alla fine del suo moto, e T_1 l'energia cinetica posseduta dal grave all'inizio del suo moto. Quindi $T_2 = 0$ e $T_1 = \dfrac{1}{2}\,m_1 v^2$. Si ha, pertanto, $T_1 = L = \dfrac{1}{2}\,m_1 v^2 = \displaystyle\int_0^\infty F'\,dx$; da questa relazione dobbiamo ricavare la velocità v.

Dividendo per m_1 si ha

$$\frac{1}{2}\,v^2 = \int_0^\infty \frac{g\,r^2}{(r+x)^2}\,dx = g\,r^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(r+x)^2} \tag{131}$$

da cui

$$v^2 = 2\,g\,r^2 \left[\frac{-1}{r+x}\right]_0^\infty = 2\,g\,r \tag{132}$$

e infine

$$v = \sqrt{2\,g\,r} \tag{133}$$

che, per $g = m.\ 9,8$, $r = m.\ 6,37 \cdot 10^6$ (raggio medio della Terra), fornisce il valore della *velocità di fuga* in km. 11,170 al secondo, cioè la velo-

città iniziale, a distanza r dal «centro di gravità terrestre» (cioè *sulla* superficie terrestre), che deve acquistare il grave, per uscire dal «campo gravitazionale» della Terra. Tale velocità è uguale a quella che un grave, *cadendo*, acquisterebbe, dopo aver percorso una distanza uguale al raggio terrestre (con g costante).

Nel nuovo concetto, r ha il significato della misura in chilometri *non* euclidei della profondità della Terra, e x il significato di chilometri *non* euclidei che il grave percorre innalzandosi sopra la Terra in direzione del cielo. Dalla superficie terrestre al centro del mondo (endosferico) vi è una distanza, in termini *non* euclidei, *infinita*, quindi x varia da 0 a ∞. Come si vede, purchè si attribuisca alle grandezze che figurano nella legge di Newton e in tutte le relazioni della Meccanica Celeste il significato che loro compete nello spazio *non* euclideo della Teoria endosferica, quella legge e quelle formule conservano la loro piena validità.

La variazione dell'accelerazione di gravità g, che acquista ai poli il maggior valore e, all'equatore, il minore, è attribuita, nella Teoria classica, a due cause : 1) lo schiacciamento ai poli ; 2) il vettore della *forza centrifuga*, dovuto alla rotazione terrestre, è massimo all'equatore e nullo ai poli, e poichè esso forma con il vettore gravitazionale un angolo ottuso (piatto all'equatore) consegue che il vettore *gravità*, ottenuto sommando vettorialmente i due precedenti vettori, sia minore del vettore gravitazionale. Ai poli il vettore gravità coincide con il vettore gravitazionale e pertanto g assume ivi il massimo valore.

E precisamente (72, I vol. ; 306) i valori di g a 0°, 45°, 90° di latitudine e al livello del mare sono approssimativamente :

(134) $$g_0 = 978{,}0 \quad ; \quad g_{45} = 980{,}6 \quad ; \quad g_{90} = 983{,}2 \ \frac{cm}{sec^2}$$

La forma ad elissoide schiacciato, che presenta il geoide, è una delle prove della rotazione della Terra (di cui parleremo nel prossimo capitolo). Ciò viene confermato quantitativamente dal seguente fatto : il calcolo (*con l'ipotesi semplificatrice* di una densità terrestre costante e quando si assume al polo il valore $g_{90} = 983{,}2$) dà, all'equatore, per l'attrazione newtoniana dell'elissoide schiacciato terrestre, un valore di g di

(135) $$g_0 = 981{,}4$$

Per ottenere il valore sperimentale $g_0 = 978{,}0$ occorre tener conto della forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre ; questa crea un campo di intensità :

(136) $$H = \omega^2 r$$

ove ω, velocità di rotazione della Terra, è:

$$(137) \qquad \omega = \frac{\text{un giro}}{\text{giorno sidereo}} = \frac{2\pi}{86164} \frac{rad}{sec}$$

Risulta in particolare all'equatore $H = 3{,}4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

Il valore sperimentale dell'accelerazione di gravità è la differenza tra la pura azione newtoniana e la pura azione centrifuga. Deve dunque essere:

$$(138) \qquad g_0 = 981{,}4 - 3{,}4 = 978{,}0 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

d'accordo con l'esperienza.

Questi calcoli, rileviamo tuttavia, sono fondati, oltrechè sui dati d'osservazione, anche su qualche ipotesi, come or ora abbiamo riferito.

Nel nuovo concetto la causa dovuta allo schiacciamento terrestre sussiste ancora. Dalla relazione (23) $g = f \frac{m}{r^2}$ si vede subito che, essendo r minore ai poli che all'equatore, g ai poli acquista un valore maggiore che all'equatore. E ciò, ripeto, si rileva per inversione, anche nella Teoria Endosferica, ove ai poli r (valutato in unità *non* euclidee) è ancora minore che all'equatore. È la causa seconda, quella relativa al vettore forza centrifuga, che, nel nuovo concetto, più non sussiste, nel senso che la rotazione terrestre, ammessa anche nel nuovo concetto, come vedremo nel prossimo capitolo, dà luogo a un vettore di forza centrifuga, che forma con il vettore «gravitazionale» (in effetti *repulsivo*, dovuto all'azione solare) un angolo acuto (nullo all'equatore), con un effetto su g esattamente opposto a quello considerato nella Teoria classica.

Questo fatto viene però compensato, nella nuova Teoria, da un'altra circostanza che subito esponiamo.

Il Sole (come preciseremo nel prossimo capitolo) percorre una traiettoria ellittica, attorno al Centro Stellare, lungo lo Zodiaco: il piano di tale traiettoria forma un angolo di 23° 27′ con l'equatore celeste. Qui interessa rilevare che il Sole si trova costantemente più lontano dai poli di quanto lo sia dall'equatore terrestre (ciò accade ovviamente anche nella Teoria classica).

La forza repulsiva solare, pertanto, che, come si è detto, dopo la zona di equilibrio fra le due forze, l'attrattiva e la repulsiva, prevale sull'attrattiva, poichè cresce al crescere della distanza, agirà con inten-

sità minore all'equatore che non ai poli. Questa è la seconda ragione per la quale, quindi, il peso di un corpo è minore all'equatore che non ai poli.

Pertanto la variazione di g è dovuta, nel nuovo concetto, a due cause: una è connessa con lo schiacciamento ai poli (causa già considerata dalla Teoria classica); l'altra è dovuta alla minore distanza del Sole dall'equatore che non dai poli, con un conseguente diverso effetto della forza repulsiva.

Nella Tav. IX è illustrata la configurazione delle linee attrattive della Teoria classica e quella, inversa della prima, delle linee repulsive dalla Teoria Endosferica. Le linee — attrattive e repulsive — in entrambe le teorie intersecano la superficie terrestre (nelle figure nei punti 1',..., 9') sotto angoli eguali. Il diagramma a sinistra mostra un oggetto situato in 0 a una distanza di km. 6400 dalla Terra convessa. La corda $\overline{1\ 9}$, congiungente i punti di contatto delle linee tangenti la superficie terrestre, è segata dalle linee attrattive nei punti $1 \equiv 1'$, $9 \equiv 9'$ e 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nella figura a destra abbiamo l'inversione di O in O, della corda $\overline{1\ 9}$ nel cerchio 1,..., 9, passante per il centro del circolo d'inversione (superficie terrestre), così come l'inversione dei punti 1',...,9', nei punti 1',...,9'. I punti a, b, c, d, e a', b', c', d' sono i punti della retta dei centri delle linee (curve) di repulsione (inverse delle linee attrattive).

Quanto alle maree, che sono oscillazioni periodiche della superficie del mare, attorno alla posizione d'equilibrio, dovute a piccole forze perturbatrici periodiche derivate dall'attrazione del Sole e della Luna, il nostro metodo d'inversione e la considerazione della natura dello spazio endosferico consentono una spiegazione altrettanto soddisfacente di quella fornita dalla Meccanica Celeste della Teoria classica.

Passiamo a trattare, nel prossimo capitolo, della rotazione della Terra e dell'« orbita terrestre ».

Nota. — Per Centro Stellare si è inteso riferirsi ora alla regione del sistema delle stelle (pagg. 268, 274), ora al centro della regione anzidetta. Precisiamo meglio. Il Centro Stellare propriamente detto è il centro (pag. 262) del sistema delle stelle, sistema che occupa la regione centrale del mondo endosferico; tale centro è il polo negativo del campo universale, avente per polo positivo il Sole, e di tutti i molteplici campi aventi, ciascuno, per polo positivo una stella. Per effetto di tali campi si hanno tra l'altro i fenomeni illustrati nelle Tavole X, XI e XVI (per es. la volta stellata del cielo, ecc.). I raggi cosmici, uscenti dalla regione stellare, percorrono le linee di forza di detti campi, le quali costituiscono le geodetiche dello spazio.

Passiamo ora ad una ulteriore precisazione. Alla *repulsione solare* (pag. 265) si aggiunge la *repulsione cosmica* o *universale* (pag. 311), dovuta all'insieme delle masse stellari. Supponendo approssimativamente simmetrica rispetto al centro (sferica) la massa del sistema delle stelle, il suo baricentro, coincidente con il centro del sistema stesso, esercita azioni gravitazionali attrattive e repulsive (secondo quanto è detto a pag. 265). Tali azioni, che risultano verticali in ogni luogo della superficie terrestre, hanno ai poli una efficacia un poco superiore che all'equatore (la loro azione appare meno diretta nella zona equatoriale, dove ruotano il Sole e i pianeti).

sità minore all'equatore che non ai poli. Questa è la seconda ragione per la quale, quindi, il peso di un corpo è minore all'equatore che non ai poli.

Pertanto la Variazione di g è dovuta, nel nuovo concetto, a due cause: una è connessa con lo schiacciamento ai poli (causa già considerata dalla Teoria classica); l'altra è dovuta alla minore distanza del Sole dall'equatore che non dai poli, con un conseguente diverso effetto della forza repulsiva.

Nella Tav. IX è illustrata la configurazione delle linee attrattive della Teoria classica e quella, inversa della prima, delle linee repulsive della Teoria Endosferica. Le linee — attrattive e repulsive — di entrambe le teorie intersecano la superficie terrestre (nelle figure nei punti 1',..., 9') sotto angoli eguali. Il diagramma a sinistra mostra un oggetto situato in 0 a una distanza di km. 6400 dalla Terra convessa. La corda 1-9, congiungente i punti di contatto delle linee tangenti la superficie terrestre, è segata dalle linee attrattive nei punti 1 ≡ 1', 9 ≡ 9' e 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nella figura a destra abbiamo l'inversione di 0 in 0, della corda 1-9 nel cerchio 1,..., 9, passante per il centro del circolo d'inversione (superficie terrestre), così come l'inversione dei punti 1',...,9' nei punti 1',...,9'; i punti a, b, c, d, e, ... sono i punti della retta dei centri delle linee (curve) di repulsione (inverso delle linee attrattive).

Quanto alle maree, che sono oscillazioni periodiche della superficie del mare, attorno alla posizione di equilibrio, dovute a piccole forze perturbatrici periodiche derivate dall'attrazione del Sole e della Luna, il nostro metodo d'inversione e la considerazione della natura dello spazio endosferico consentono una spiegazione altrettanto soddisfacente di quella fornita dalla Meccanica Celeste della Teoria classica.

Passiamo a trattare nel prossimo capitolo, della rotazione della Terra e dell'« orbita terrestre ».

CAPITOLO VII.

I moti di “rivoluzione” e di rotazione della Terra.

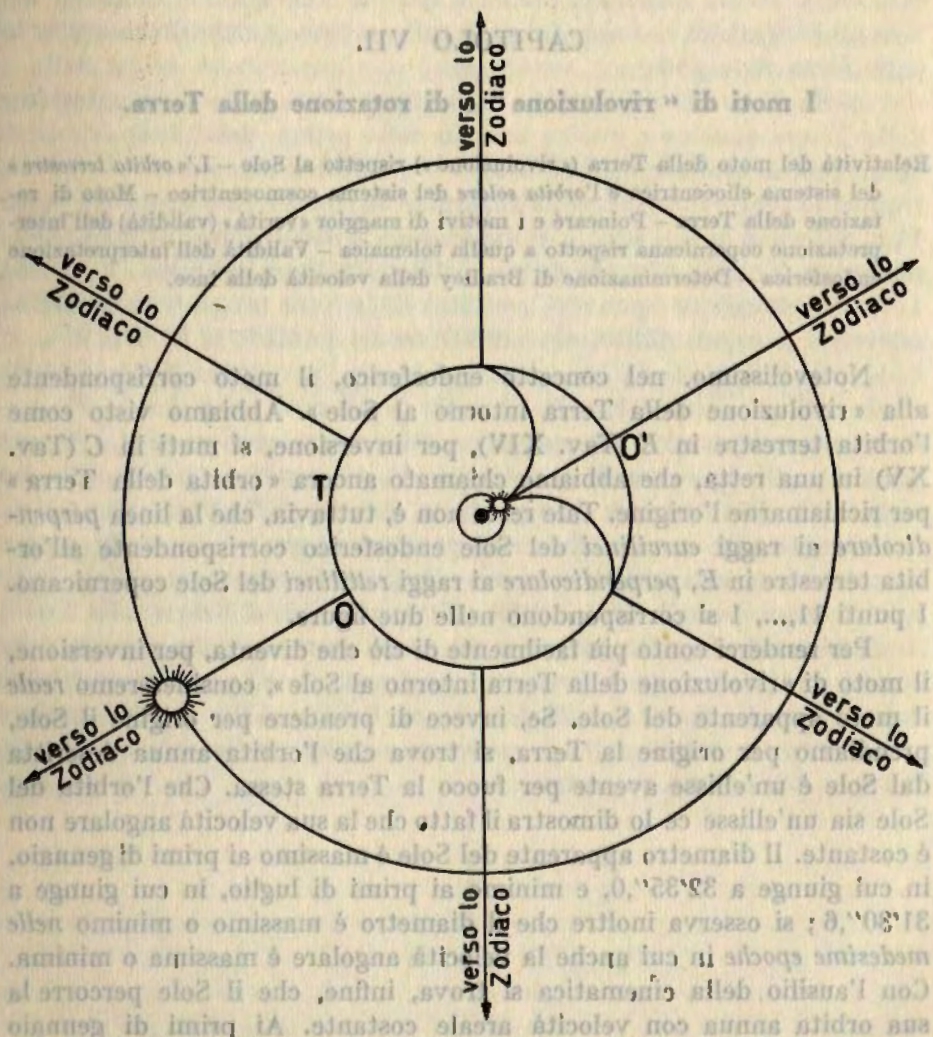
Relatività del moto della Terra («rivoluzione») rispetto al Sole – L'«*orbita terrestre*» del sistema eliocentrico e l'*orbita solare* del sistema cosmocentrico – Moto di rotazione della Terra – Poincaré e i motivi di maggior «verità» (validità) dell'interpretazione copernicana rispetto a quella tolemaica – Validità dell'interpretazione endosferica – Determinazione di Bradley della velocità della luce.

Notevolissimo, nel concetto endosferico, il moto corrispondente alla «rivoluzione della Terra intorno al Sole». Abbiamo visto come l'orbita terrestre in *E* (Tav. XIV), per inversione, si muti in *C* (Tav. XV) in una retta, che abbiamo chiamato ancora «orbita della Terra» per richiamarne l'origine. Tale retta non è, tuttavia, che la linea *perpendicolare* ai raggi *curvilinei* del Sole endosferico corrispondente all'orbita terrestre in *E, perpendicolare* ai raggi *rettilinei* del Sole copernicano. I punti 11,..., 1 si corrispondono nelle due figure.

Per renderci conto più facilmente di ciò che diventa, per inversione, il moto di «rivoluzione della Terra intorno al Sole», considereremo *reale* il moto apparente del Sole. Se, invece di prendere per origine il Sole, prendiamo per origine la Terra, si trova che l'orbita annua descritta dal Sole è un'ellisse avente per fuoco la Terra stessa. Che l'orbita del Sole sia un'ellisse ce lo dimostra il fatto che la sua velocità angolare non è costante. Il diametro apparente del Sole è massimo ai primi di gennaio, in cui giunge a 32′35″,0, e minimo ai primi di luglio, in cui giunge a 31′30″,6; si osserva inoltre che il diametro è massimo o minimo *nelle medesime epoche* in cui anche la velocità angolare è massima o minima. Con l'ausilio della cinematica si trova, infine, che il Sole percorre la sua orbita annua con velocità areale costante. Ai primi di gennaio si ha il *perigeo* e ai primi di luglio *l'apogeo*.

«Notiamo, scrive Armellini (9, *b*; 61), che, se considerassimo *soltanto* il Sole e la Terra, dal lato puramente *cinematico*, sarebbe impossibile decidere quale dei due corpi, la Terra o il Sole, si muova; la que-

stione anzi non avrebbe senso, giacchè ogni moto è necessariamente relativo ».

Assimilando le ellissi a circoli, sia, in figura, *T* la circonferenza della Terra, che assumiamo come circolo d'inversione. L'orbita copernicana del Sole, esterna a *T*, si muta nell'orbita solare, interna a *T*.

Il Sole copernicano, visto da un osservatore esterno *O*, percorre l'eclittica lungo le 12 costellazioni dello Zodiaco disposte a distanze remotissime, così come l'osservatore *O'*, situato sulla Terra concava, vede il Sole percorrere l'eclittica lungo lo Zodiaco attorno al Centro Stellare,

cui corrispondono, nell'inversione, quelle remotissime distanze. Il piano dell'eclittica (sia classica che endosferica), intersecandosi con quello dell'equatore, forma con esso un angolo di 23° 27′, angolo che misura la cosidetta *obliquità dell'eclittica.*

Prima di proseguire nel considerare i *reali* movimenti della Terra e del Sole, giova ricordare qui, per quanto notissimi, i dati d'osservazione.

Il Sole non sorge nè tramonta sempre allo stesso punto nè compie un arco sempre uguale nel cielo. Infatti dal 21 dicembre al 21 giugno gli archi descritti diventano sempre maggiori, a misura che il punto di culminazione del Sole s'innalza via via sull'orizzonte fino a raggiungere il punto più alto il 21 giugno; poi diminuiscono, a misura che il punto di culminazione s'avvicina via via all'orizzonte fino a raggiungere il punto più basso il 21 dicembre. Quindi il Sole non compie, sia pure solo apparentemente, attorno alla Terra, dei circoli chiusi, bensì una spirale di circa 180 giri. Inoltre, come s'è detto, il diametro del Sole nell'emisfero boreale appare massimo ai primi di gennaio (cioè pochi giorni dopo il più basso punto di culminazione) e minimo ai primi di luglio (cioè pochi giorni dopo il più alto punto di culminazione). Nell'emisfero australe, invece, appare massimo pochi giorni dopo il più alto punto di culminazione e minimo pochi giorni dopo il più basso punto di culminazione.

Il Sole poi percorre, nel periodo di un anno, lo Zodiaco, soffermandosi un mese in ciascuna delle 12 costellazioni zodiacali.

Questo, dunque, è quanto si osserva. La spiegazione di ciò, fornita dalla Teoria copernicana, è questa: l'apparente traiettoria percorsa dal Sole, lungo lo Zodiaco, attorno alla Terra, non è che la traiettoria percorsa dalla Terra nel suo moto di «rivoluzione» attorno al Sole (interpretazione consentita, come s'è visto, dalla relatività dei moti); tale traiettoria è ellittica, perchè, abbiam detto, la velocità angolare del Sole non è costante, raggiungendo la massima velocità quando il diametro apparente è massimo, la minima quando il diametro apparente è minimo, risultando costante la velocità areale. Nel capitolo XIII, Parte I, abbiamo visto come procedette Kepler, interpretando le osservazioni in accordo con la Teoria Eliocentrica di Copernico, per disegnare l'orbita terrestre; gli anelli aperti della spirale sono stati spiegati attribuendo alla Terra un moto di rotazione; infine il fatto che l'orbita apparente del Sole o eclittica formasse un angolo di 23° 27′ con il piano dell'equatore è stato spiegato mediante l'ipotesi che il piano dell'equatore terrestre formasse con il piano della traiet-

toria della Terra attorno al Sole detto angolo di 23° 27', ossia supponendo che l'asse terrestre fosse inclinato rispetto al piano dell'eclittica, formando con questo un angolo di 66° 33'. Mediante, quindi, la rotazione terrestre, la rivoluzione terrestre e l'obliquità dell'asse terrestre, venne spiegato quanto veniva osservato, in accordo con la Teoria Eliocentrica che considerava il Sole fermo rispetto alla Terra e agli altri pianeti. La Meccanica Celeste, fondata sulla legge di Newton, spiegò poi tali moti da un punto di vista dinamico, con i sorprendenti risultati a tutti noti. Considerando *reale* il moto di «rivoluzione» della Terra e apparente l'orbita del Sole, si è chiamato *perielio* il punto dell'orbita terrestre più prossimo al Sole (Tropico del Capricorno) e *afelio* il punto più remoto (Tropico del Cancro).

L'inversione dell'orbita ellittica del Sole, come abbiamo visto, porta ancora ad un'orbita ellittica del Sole lungo lo Zodiaco, che si estende attorno al Centro Stellare, su un piano obliquo rispetto all'equatore celeste. Nel concetto endosferico vengono a mancare alcuni dei motivi che indussero i copernicani a considerare reale, accanto a quello di rotazione, il moto di «rivoluzione» della Terra e a ritenere, quindi, apparente l'orbita del Sole (come quello, ad es., di non poter ammettere che il Sole e le altre innumerevoli e remotissime stelle, *in un sol giorno e simultaneamente* fossero capaci di percorrere così immensi spazi); nel nuovo concetto l'orbita del Sole si considera reale. Le osservazioni mostrano il cammino annuale del Sole come una spirale conica, la cui parte più stretta si trova nel Nord. Tagliando siffatta spirale conica lungo la linea zodiacale, si ha una ellissi, cioè il cammino del Sole o eclittica, avente per estremi dell'asse maggiore il Tropico del Cancro (afelio, o, meglio, apogeo) e il Tropico del Capricorno (perielio, o, meglio, perigeo), distanti dall'equatore 23° 27'. All'obliquità dell'eclittica della Teoria classica corrisponde, nel nuovo concetto, l'obliquità dell'eclittica, come si è detto sopra. Alla rotazione della Terra del sistema copernicano corrisponde ancora, nel nuovo sistema, la rotazione della Terra. La relatività dei moti potrebbe indurre anche a pensare che sia il cielo interno a ruotare, restando la Terra ferma. Ma vi sono alcune prove (non aventi tuttavia un valore assoluto), che, addotte a favore della rotazione della Terra dalla Teoria classica, conservano la loro validità anche nella nuova concezione. Esse sono per esempio l'appiattimento della Terra ai poli; prove di carattere qualitativo e meno dirette si hanno nella direzione dei venti alisei e contralisei, nel fatto che i cicloni girano sempre nel medesimo senso, mentre ragioni di simmetria esigerebbero che essi girassero indifferentemente in un senso e

nell'altro ; ugualmente probanti sono le due esperienze della caduta dei gravi verso oriente (Galilei) e la rotazione del piano di oscillazione del pendolo (Foucault).

Sul moto di « rivoluzione » e di rotazione della Terra occorre, tuttavia, attardarci ancora, prendendo in considerazione un passo di Poincaré del più alto interesse (74, *b* ; 241) : « Non vi è spazio assoluto. Delle due proposizioni contradditorie : " la Terra gira " e " la Terra non gira " una non è più vera, cinematicamente, dell'altra. Affermare l'una e negare l'altra, equivarrebbe ad ammettere, *in senso cinematico*, l'esistenza dello spazio assoluto. Ma se l'una ci rivela rapporti veri che l'altra ci dissimula, la si potrà non di meno considerare come fisicamente più vera dell'altra, poichè ha un contenuto più ricco. Ora, a questo riguardo, non è possibile alcun dubbio. Ecco il movimento diurno apparente delle stelle, e il movimento diurno degli altri corpi celesti, e d'altra parte l'appiattimento della Terra, la rotazione del pendolo di Foucault, il giro dei cicloni, i venti alisei, e che so io ancora ? *Per il tolemaico, tutti questi fenomeni non hanno tra di loro alcun legame ; per il copernicano essi sono generati da una medesima causa.* Dicendo : la Terra gira, affermo che tutti questi fenomeni hanno un rapporto intimo, e ciò rimane vero, benchè non vi sia nè vi possa essere spazio assoluto. Ciò per quanto riguarda la rotazione della Terra su se stessa : che dire poi della sua rivoluzione intorno al Sole ? Anche qui abbiamo tre fenomeni che per il tolemaico sono assolutamente indipendenti, mentre per il copernicano sono da riferire ad una medesima origine : essi sono gli spostamenti apparenti dei pianeti sulla sfera celeste, l'aberrazione delle stelle fisse e la loro parallasse. È per caso che tutti i pianeti ammettono una ineguaglianza, il cui periodo è di un anno, e che questo periodo è precisamente uguale a quello dell'aberrazione, ed è anche proprio eguale a quello della parallasse ? Adottare il sistema di Tolomeo equivale a rispondere affermativamente ; adottare quello di Copernico significa rispondere negativamente: significa affermare che vi è un legame fra i tre fenomeni ; e ciò è anche vero, benchè non vi sia spazio assoluto. Nel sistema di Tolomeo, i movimenti dei corpi celesti non possono spiegarsi con l'azione delle forze centrali, e quindi la Meccanica Celeste è impossibile. I rapporti intimi rivelatici dalla Meccanica Celeste tra tutti i fenomeni celesti sono rapporti veri : affermare l'immobilità della Terra sarebbe negare questi rapporti, sarebbe dunque ingannarsi. La verità, per cui Galileo ha sofferto, rimane dunque verità, anche se essa non abbia lo stesso significato che ha per il volgo, e se il suo significato sia ben più sottile, più profondo e più ricco ».

Per il fisico è questo, e deve esser questo, il criterio di verità. Einstein vi si sofferma, come già abbiamo accennato, laddove, a proposito dell'eguaglianza *massa inerte* = *massa pesante*, scrive fra l'altro (30, *b*; 46): « Una teoria che offra una spiegazione dell'identità delle due masse è superiore a quella che interpreti tale identità come accidentale, sempre che, benintenso, le due teorie siano ugualmente in accordo con i fatti osservati ».

Per quanto riguarda la rotazione terrestre, avendola ammessa anche nel nuovo concetto, nulla abbiamo da aggiungere.

Invece è sulla « rivoluzione » attorno al Sole che vi è una diversa interpretazione nel nuovo concetto. Abbiamo visto che tale « orbita terrestre » non è che il moto ellittico del Sole attorno allo Zodiaco. Il criterio di verità dianzi accennato ci porta a domandarci se, anche nel nuovo concetto, i tre fenomeni: gli spostamenti apparenti dei pianeti sulla sfera celeste, l'aberrazione delle stelle fisse e la loro parallasse, sono da riferire ad una medesima origine. Vediamo subito che la risposta è affermativa.

Il Sole e il Centro Stellare sono le sorgenti del campo universale, le cui linee di forza sono le geodetiche dello spazio cosmico. Nel cap. II di questa Parte III abbiamo riferito il concetto di Faraday sulle linee di forza: fermando l'attenzione sui fenomeni che avvengono nel *mezzo* (sia esso il vuoto o un dielettrico), che circonda i corpi elettrizati, egli attribuì alle linee di forza, che solcano il mezzo, una esistenza reale e non un valore di semplice rappresentazione geometrica del campo (71, *c*; 84). Spostandosi il Sole rispetto al Centro Stellare, si modifica ovviamente la configurazione del campo, ciò che dà luogo all'osservata aberrazione delle stelle fisse e alla parallasse di queste esattamente nel periodo di un anno; inoltre, sempre a causa di tale modificazione, anche le geodetiche orbitali dei pianeti si spostano, e, ovviamente, nel periodo di un anno. I tre fenomeni, quindi, sono da attribuirsi ad una medesima origine, il moto del Sole. L'« orbita terrestre » è vera, seppure non « tangibilmente provata », come scrive Armellini (9, *b*; 181), ammettendo l'euclideità dello spazio universale; *l'orbita del Sole* è vera ammettendo un tipo di spazio non euclideo a curvatura variabile, avente le caratteristiche che abbiamo descritto.

La determinazione della velocità della luce, eseguita da James Bradley nel 1728 in base all'aberrazione delle stelle, trova la sua piena giustificazione anche nel nuovo concetto, con la sola considerazione che, in termini di spazio *non* euclideo, essa non implica l'« orbita terrestre », ma bensì l'orbita del Sole.

È interessante rilevare che il risultato negativo delle esperienze di Michelson e Morley, Trouton e Noble, Trouton e Rankine, di cui abbiamo parlato nel capitolo II, parte II, escogitate allo scopo di rendere evidente il «moto traslatorio» della Terra, non fece nascere il benchè minimo sospetto che, per l'appunto, tale moto, poichè così da quelle esperienze risultava, fosse effettivamente inesistente! Ciò tuttavia non deve eccessivamente sorprendere, perchè, ammesso lo spazio euclideo (e non sembrava potersi fare una ipotesi essenzialmente diversa) il moto di traslazione deve ammettersi di conseguenza proprio per le considerazioni di Poincaré sopra riferite. D'altra parte non è stato vano che un tale sospetto non sia sorto; chè, altrimenti, forse, non saremmo venuti in possesso di quel poderoso e fecondo edificio di pensiero, che porta il nome di Teoria della Relatività, e che prese le mosse proprio dal risultato negativo della celebre esperienza di Michelson.

Conseguenze del moto di rotazione della Terra e dell'orbita del Sole sono le stagioni e l'alternarsi del giorno e della notte, di cui tratteremo, insieme col sistema dell'orizzonte, nel prossimo capitolo.

Nota. — Al moto annuale apparente del Sole rispetto alla Terra può darsi una interpretazione perfettamente equivalente a quella data in questo capitolo. Le osservazioni non mutano se in luogo del solo moto del Sole, si ammettono un moto del Sole e un moto pendolare della Terra di ampiezza pari a 23° 27′, dandosi così ragione di fatti come le parallassi stellari, l'aberrazione della luce stellare, ecc.

CAPITOLO VIII.

Le stagioni. Il giorno e la notte. Il sistema dell'orizzonte.

L'orbita del Sole e le stagioni – La rotazione della Terra, il giorno e la notte – La concavità della volta del cielo e il sistema dell'orizzonte.

1.

Il moto ellittico del Sole, su un piano obliquo rispetto all'equatore, e il moto di rotazione della Terra spiegano, in modo analogo alla Teoria classica, le stagioni e l'alternarsi del giorno e della notte.

Il 21 di marzo il Sole si trova in uno dei punti d'intersezione dell'eclittica con l'equatore celeste, detto *punto vernale*: si ha *l'equinozio di primavera* (boreale). Il Sole prosegue la sua corsa raggiungendo il 20 di giugno il Tropico del Cancro (afelio o apogeo); nell'emisfero boreale comincia l'estate con il *solstizio d'estate*: è questa la posizione del Sole nella Tav. XVI, ove il circolo polare artico è illuminato, mentre rimane in ombra quello antartico. Da detto Tropico (da Τρόπος = ritorno) il Sole « torna indietro » raggiungendo il 23 settembre l'altro *punto equinoziale*: nell'emisfero boreale si ha *l'equinozio d'autunno*, giorno d'inizio della stagione autunnale. Poi il Sole raggiunge il 21 dicembre l'altro *Tropico*, quello *del Capricorno* (perielio o perigeo): nell'emisfero boreale si ha il *solstizio d'inverno*. Il Sole infine completa la sua orbita, raggiungendo nuovamente il 20 marzo, il punto vernale. Altri particolari circa il fenomeno delle stagioni, data la stretta analogia con la nostra descrizione, possono essere letti agevolmente in qualunque testo scolastico.

L'alternarsi del giorno e della notte è dovuto, invece, alla rotazione della Terra. Nella Tav. XI è illustrato tale fenomeno sia secondo la Teoria esosferica che secondo quella endosferica. Come i raggi rettilinei del Sole illuminano solo un emisfero della Terra convessa, così i raggi curvilinei del Sole endosferico illuminano solo un emisfero della Terra concava (il Centro Stellare sta al centro del mondo, mentre il Sole è discosto da questo). L'altro emisfero della Terra convessa rimane in ombra (notte), perchè non può essere raggiunto dai raggi solari; altrettanto

avviene nell'altro emisfero della Terra concava, che rimane in ombra perchè i raggi solari, che cadono verticali a mezzogiorno e via via sempre più obliqui fino a sfiorare tangenzialmente il suolo terrestre nei punti corrispondenti alle ore 6 a.m. e 6 p.m., oltre questi due punti non toccano più la Terra, ma girano negli spazi fino a raggiungere l'altra sorgente del campo universale, il Centro Stellare. Dal lato della notte, a causa della curvatura delle radiazioni luminose, resta priva di raggi solari una vasta zona a forma di imbuto a pareti curve (simile a una superficie pseudosferica rotonda con punto doppio conico) : queste radiazioni, che circolano negli alti spazi dal lato della notte, spiegano soddisfacentemente la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna, di cui si è parlato nel cap. I di questa Parte III. I raggi curvilinei del Sole sono stati ottenuti con il metodo d'inversione di Morrow. Un osservatore supposto situato nel punto 2 sulla Terra convessa, riceve un'immagine dei fenomeni, di cui lo supponiamo spettatore, esattamente identica a quella che riceve l'osservatore situato nel punto 2 sulla Terra concava, per il fatto che quest'ultimo prolunga mentalmente i raggi luminosi nella direzione con la quale questi penetrano nel suo occhio (o nella camera oscura di una macchina fotografica), identificandosi le immagini da lui così percepite con quelle dell'altro supposto osservatore. All'arco 6 p.m.⌒10 corrisponde, per inversione, la corda 6 p.m.‾10. All'orizzonte apparente (tangente rettilinea) corrisponde, per inversione, l'orizzonte reale (tangente curvilinea) e così via.

La Tav. X illustra il sistema dell'orizzonte, ossia il metodo per coordinare i gradi celesti con i gradi dell'arco della volta del cielo.

La costruzione di un sistema astronomico nello spazio euclideo richiede un solo circolo o arco concavo sulla volta del cielo. Nello spazio endosferico dobbiamo invece impiegare due sistemi di gradi, uno connesso con il centro d'osservazione e l'altro legato al Centro Cosmico, dal quale le linee radiali si estendono sulla superficie della Terra concava. Così vi sono gradi celesti e gradi sull'arco rivolto verso la superficie terrestre. Questi due sistemi di gradi debbono coordinarsi in modo preciso. Di qui il sistema dell'orizzonte della Teoria Endosferica.

Gli astri, situati nelle profondità dello spazio cosmico, appaiono proiettati, nei differenti punti, sulla grande volta del cielo, che sembra coprire il mondo. La semicirconferenza ABCDE appare ingrandita ed estesa nella semicirconferenza *A' B' C' D' E'*, i cui gradi sono gli stessi della concentrica semicirconferenza minore ; così, per esempio, se il Sole fosse in *A*, apparirebbe sorgere in *A'* ; alle 9 a.m. si troverebbe in *B*, ma apparirebbe proiettato in *B'*. *C* e *C'* si trovano allo zenit, *D*

e D' si corrispondono alle 3 p.m. Un osservatore situato nel punto medio di A' E' nel determinare l'altezza e l'azimut di un astro in un dato momento, misurerebbe effettivamente l'altezza e l'azimut dell'astro in relazione all'arco nel Campo Celeste endosferico, e ciò con una esattezza uguale a quella che otterrebbe se il punto fosse posto sulla volta apparente. Nel diagramma il grande arco rivolto verso l'alto rappresenta la curva della superficie terrestre. La semicirconferenza più grande A' B' C' D' E', come risulta da quanto abbiamo detto, rappresenta la volta apparente del cielo. Chiamando P il punto medio del diametro A' E', l'arco PA non è che la linea apparentemente orizzontale, che si estende dall'osservatore in P. L'intero arco o circolo APE è la *tangente curvilinea* del mondo endosferico; esso mantiene con l'arco concavo della Terra le stesse relazioni che la *tangente rettilinea* $A'PE'$ mantiene con l'arco terrestre considerato convesso.

Qualsiasi oggetto visto nello spazio (non importa quanto le linee di luce uscenti da detto oggetto possano essere incurvate da qualsiasi causa) appare trovarsi *nella direzione con cui i raggi entrano nell'occhio* o nella camera oscura di una macchina fotografica. In tal modo un astro in B appare trovarsi in B' ad una altezza di 45 gradi sopra l'orizzonte. Così avviene, perchè l'astro, *trovandosi a* 45 *gradi nel cielo stellato,* invia i suoi raggi in basso e verso l'esterno *entrando nell'occhio dell'osservatore sotto lo stesso angolo.* Avendo come linea fondamentale di osservazione la tangente curvilinea, insieme con un completo e preciso sistema, che coordina i gradi celesti con i gradi terrestri, possiamo applicare siffatta geometria all'Astronomia Matematica con la certezza di ottenere risultati non soltanto *esatti,* ma *corretti.*

CAPITOLO IX.

Le fasi lunari. Eclissi solare ed eclissi lunare. Occultazioni di stelle.

Le fasi lunari, l'eclissi solare e l'eclissi lunare nei due sistemi, eliocentrico e cosmocentrico – Occultazioni di stelle – L'interpretazione dell'ombra della Luna nelle due concezioni del mondo.

La Tav. VIII illustra le fasi lunari nei due sistemi, esosferico ed endosferico. Il fenomeno, dal punto di vista classico, è notissimo. La Luna gira attorno alla Terra ed è illuminata dal Sole, i cui raggi, per la grande distanza Terra-Sole, si considerano paralleli. Nella fig. sup. sul cerchio tratteggiato, che è l'orbita lunare, si vedono le varie posizioni (Luna Nuova, Primo Quarto, Luna Piena, Ultimo Quarto) e le posizioni intermedie, che la Luna assume nel periodo di una lunazione. Più esternamente sono disegnate le immagini della Luna così come questa è vista dall'osservatore supposto situato sulla Terra convessa. Prendendo come circolo d'inversione l'orbita della Luna, con il metodo già illustrato si ottiene l'inversione della precedente figura. La circonferenza della Terra convessa si muta nella circonferenza della Terra concava, che si disporrà nell'inversione *esternamente* all'orbita lunare. I punti all'∞ si mutano nel centro del cerchio (Centro Stellare). Il Sole copernicano si muta in una sfera prossima al centro ; i raggi rettilinei si mutano in raggi curvilinei. Sull'orbita lunare ed esternamente ad essa si osservano le medesime posizioni e le medesime immagini della configurazione classica. Si noti anche qui, d'accordo con la nostra legge di trasformazione, l'invarianza degli angoli. È superfluo aggiungere che, per ragioni di chiarezza e di spazio, non sono state rispettate le reali proporzioni.

La Tav. XII illustra l'eclissi solare e quella lunare dal punto di vista copernicano. Per le solite ragioni non sono rispettate le reali proporzioni : la grandezza della Terra, il centro del Sole distante dal centro della Terra solo otto volte il raggio terrestre, e il centro della Luna di-

stante dal centro della Terra solo due volte il raggio terrestre, sono stati così sistemati per mostrare approssimativamente le varie ombre proiettate sulla Terra in una eclissi solare, e dalla Terra in una eclissi lunare. L'ombra della Luna, in un'eclissi totale del Sole, è solo di circa 1600 chilometri di diametro, mentre la penombra copre un'area di circa 10.000 chilometri di diametro. Nel caso di una eclissi totale di Luna, vi è su di essa un'ombra ben definita, mentre vi sono spazi in penombra prima e dopo la totale occultazione. Nella figura vi sono vari circoli e linee, che s'intersecano, alcune linee che mettono in relazione il Sole con la Terra convessa, e altre radiali che si estendono dal centro della Terra, formando angoli definiti. La figura è analoga a quella che si trova in tutti i trattati di Astronomia, con analoghe sproporzioni. Non è possibile fare un disegno tanto grande da mostrare Terra, Sole e Luna nella vera scala.

La Tav. XIII è l'inverso geometrico della precedente: in essa i rapporti, le intersezioni e gli angoli sono esattamente gli stessi della configurazione classica. Come circolo d'inversione è stata assunta l'orbita della Luna, che ha lo stesso diametro dell'orbita della figura precedente. Poichè in quest'ultima il centro del Sole dista dal centro della Terra otto volte il raggio terrestre, e il centro della Luna due volte, nella figura invertita il Sole dista dal centro della Terra concava un ottavo del raggio, mentre la Luna è nel suo punto medio. Pertanto l'inversione comporta una figura della Terra concava avente un diametro lungo quattro volte quello della Terra convessa. Gli angoli formati dalle varie ombre sulla Terra concava e le linee d'intersezione sono esattamente uguali a quelli della figura classica. Se si misurano parti dell'orbita lunare coperte dalle varie ombre, si osserverà che sono le stesse in entrambe le figure; sulla superficie terrestre si ottiene identica corrispondenza. Così, per es., l'arco della Terra concava coperto dalla penombra nella parte inferiore della figura è lungo quattro volte il corrispondente arco coperto nella Terra convessa, perchè, come abbiamo già visto, la Terra concava è rappresentata con un diametro quattro volte più lungo di quello della Terra convessa, e così via con le altre parti di arco concavo confrontato con quello convesso.

Le parti del disegno che mostrano le eclissi e le altre relazioni della Teoria classica hanno precise corrispondenze nella figura della Teoria endosferica. D'accordo con i principî della geometria d'inversione, ogni relazione astronomica può essere mostrata, nella figura della nuova Teoria, con la stessa precisione.

È interessante osservare che, mentre l'eclissi solare è dovuta, in entrambe le teorie, alla interposizione della Luna fra il Sole e la Terra, l'eclissi lunare, nel concetto endosferico, presenta una particolare differenza rispetto al vecchio concetto. Infatti, mentre secondo la Teoria classica tale eclissi si verifica quando la Terra si interpone fra il Sole e la Luna, con l'allineamento dei tre astri, secondo la nuova Teoria tale fenomeno si verifica quando la Luna attraversa quell'*imbuto a pareti pseudosferiche* (di cui si è parlato nel capitolo precedente), dove non arrivano le radiazioni solari. Ovviamente tale spiegazione non altera minimamente il fenomeno per quanto riguarda le osservazioni.

Faremo ora alcune considerazioni circa le occultazioni di stelle dovute alla Luna. I calcoli forniscono, come abbiamo già detto più volte, i medesimi valori in entrambe le Teorie, tenendo però presente che detti valori numericamente uguali debbono essere interpretati in termini euclidei nella Teoria esosferica e in termini non euclidei nella Teoria endosferica. Ora ricordiamo che la Luna non proietta sulla Terra, durante l'eclissi solare, un'ombra corrispondente al suo diametro reale, a causa della larghezza del disco solare, che origina un'ombra a forma di cono e una penombra avente un diametro di circa 10.000 chilometri. Ma, nel caso dell'occultazione di una stella, che ha una distanza, calcolata, molto maggiore di quella del Sole e non presenta un disco visibile, l'ombra proiettata sulla Terra deve avere lo stesso diametro lunare di km. 3470. Ogni anno un certo numero di stelle vengono occultate dal disco lunare. Consultando gli Almanacchi Nautici si può trovare l'epoca esatta in cui una data occultazione avrà luogo, e queste predizioni vengono fatte con molto anticipo negli Osservatori di tutte le nazioni. Non soltanto viene indicata l'epoca dell'occultazione e la posizione della stella in una data costellazione, ma anche la zona sulla Terra, nella quale avviene l'occultazione. Sulla base delle latitudini osservate, il tempo di occultazione è dato dall'intervallo fra il momento di sparizione della stella e quello di riapparizione dalla parte posteriore della Luna ; l'ombra causata dalla stella ha il diametro reale della Luna, che, come abbiamo detto, è di km. 3470.

Ora tutti i calcoli sono fatti con riferimento al *cilindro* dell'« ombra stellare » (così detta impropriamente) e non al cono, com'è il caso dell'eclisse solare. Tale cilindro d'ombra può osservarsi nella Tav. XII (la zona d'ombra più fitta dal lato della notte). In base alla Teoria classica l'ombra stellare forma un cilindro reale. In base al nuovo concetto, come può osservarsi nella Tav. XIII, l'ombra stellare non ha

forma cilindrica (la zona d'ombra più fitta dal lato della notte); tuttavia la porzione o cerchio d'ombra sulla superficie terrestre ha uguale estensione in entrambe le teorie. La circonferenza della Terra concava è risultata, nella figura, come s'è detto, 4 volte più lunga della circonferenza della Terra convessa: si osserverà che l'arco di circonferenza, coperto dall'ombra stellare nel concetto esosferico (Tav. XII), è (senza la pretesa di assoluta precisione, per quanto riguarda il disegno) pari a $\frac{1}{4}$ della porzione di circonferenza coperta dall'ombra stellare nel concetto endosferico (Tav. XIII). Ricordando che la lunghezza del cerchio massimo terrestre è circa 11,5 volte il diametro lunare, si osserverà, nel disegno classico, che la lunghezza della circonferenza terrestre (senza pretendere anche qui ad una esattezza assoluta) sta nello stesso rapporto con la lunghezza dell'arco d'ombra stellare. Naturalmente, a causa del processo ottico, inerente allo spazio non euclideo, più volte spiegato, l'ombra stellare all'osservatore terrestre *appare* cilindrica anche nel nuovo concetto. Il diametro della Luna endosferica misura *lo stesso numero* di chilometri di quello della Luna esosferica, con l'avvertenza che la misura riferita alla Luna endosferica è espressa in chilometri non euclidei, mentre la misura riferita alla Luna esosferica è espressa in chilometri euclidei. Nel sistema classico l'ombra stellare fornisce la misura del diametro reale della Luna copernicana, mentre, nel sistema cosmocentrico, poichè sulla superficie terrestre i chilometri euclidei non differiscono da quelli non euclidei, l'ombra stellare fornisce la misura del diametro che la Luna avrebbe se potesse essere rimossa e portata *sulla* Terra, data la non rigidità dei moti nello spazio non euclideo della nuova concezione.

CAPITOLO X.

Il problema delle parallassi.

La trasformazione circolare – Misure parallattiche con risultati identici nei due sistemi – Perchè la Terra concava appare convessa – Come apparirebbe la Terra concava vista dalla Luna e dal Sole – Fotografia infrarossa del monte Aconcagua.

Abbiamo già parlato più volte, e, in particolare, nei capitoli III e IV, dello spazio euclideo e di quello non euclideo a curvatura variabile, esponendo ampiamente tutti gli aspetti della trasformazione circolare, che li lega. Pertanto, a rigore, il problema delle parallassi potevamo ometterlo, perchè implicito nelle pagine precedenti. Ritengo tuttavia non del tutto superfluo parlarne in modo particolare.

Consideriamo ancora una volta ciò che si intende per misura in chilometri euclidei e per misura in chilometri non euclidei. Della figura a destra della Tav. VII esaminiamo la parte inferiore. Nel procedimento d'inversione la distanza euclidea $\overline{1\ 2}$ (eguale al raggio del circolo) si muta nella distanza non euclidea $\overline{\frac{1}{2}\quad 1}$; la distanza $\overline{2\ 3}$ euclidea (eguale a $\overline{1\ 2}$) si muta nella distanza non euclidea $\overline{\frac{1}{3}\quad\frac{1}{2}}$; la distanza euclidea $\overline{3\quad 4}$ (eguale alle precedenti distanze) si muta nella distanza non euclidea $\overline{\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}}$, e così via. Le distanze euclidee si mutano in distanze non euclidee. Immaginando di continuare a considerare, oltre il punto 4, trattini euclidei tutti uguali fra loro, ad essi corrisponderanno trattini non euclidei sempre più brevi. Dal punto 1, verso destra, si estendono infiniti chilometri euclidei, cui corrispondono, nella inversione, infiniti chilometri *non* euclidei (che si vanno infittendo, sempre più contraendosi, all'infinito). A questa considerazione puramente geometrica corrisponde un fatto fisico: lo spazio fisico euclideo si estende all'infinito uniformemente, nel senso che la densità della materia (fatta

astrazione dei punti singolari) oltrechè quasi nulla, è uniforme; lo spazio fisico non euclideo, il campo universale, l'energia, quindi, di tale spazio, è via via più densa, a misura che ci si allontana dalla superficie terrestre. Mentre nello spazio euclideo i segmenti o trattini spaziali, a ciascuno dei quali corrisponde ugual quantità di energia, sono uguali, nello spazio non euclideo i segmenti o trattini spaziali, a ciascuno dei quali corrisponde ugual quantità di energia, a causa della natura del campo (che è tanto più intenso quanto più prossimi si è alle sorgenti o cariche che lo determinano), si vanno ovviamente sempre più contraendo.

L'osservatore a e quello situato all'altro estremo della corda uscente da a puntano il telescopio tangenzialmente alla Terra sul punto 4: nota la lunghezza della corda e gli angoli (eguali) formati dal lato *rettilineo* $\overline{a\ 4}$ e dal suo simmetrico con la corda, mediante la trigonometria, si ricava il valore dell'angolo che i due lati formano nel punto 4 (la metà di tale angolo, come abbiamo visto nel capitolo XIII della Parte I, dicesi *parallassi*). Nota la parallassi è nota anche la *distanza* del punto 4. Tale calcolo presuppone la natura euclidea dello spazio, ossia la propagazione rettilinea, nel senso euclideo, dei raggi luminosi, che costituiscono il lato $\overline{a\ 4}$ del triangolo trigonometrico e il suo simmetrico.

Consideriamo ora la parte superiore della figura. L'osservatore a' punta il suo telescopio sul punto $\frac{1}{4}$ (inverso di 4); lo stesso fa l'osservatore situato nell'altro estremo della corda uscente da a'. I due osservatori misurano gli angoli formati dal lato *curvilineo* $\overline{a'\ \frac{1}{4}}$ e dal suo simmetrico con la corda e ottengono per essi le stesse misure ottenute dai due supposti osservatori prima considerati (la trasformazione è *conforme*). Detti osservatori effettuano i calcoli trigonometrici *supponendo* che lo spazio sia euclideo ed ottengono ovviamente per la misura dell'angolo, che detti due lati curvilinei formano fra loro nel punto $\frac{1}{4}$, l'identico valore ottenuto dai due osservatori prima considerati: ciò era da attendersi, perchè, ripetiamo, la trasformazione è conforme. Ad identiche parallassi corrispondono identiche distanze, con l'avvertenza che dette due distanze, numericamente eguali, vanno valutate, quella euclidea in chilometri euclidei, e quella non euclidea in chilometri non euclidei. Gli osservatori situati sulla Terra concava percepiscono le *stesse* immagini di quelli supposti situati sulla Terra convessa: essi potranno affermare la convessità oppure la concavità della Terra, a

seconda che ammettano l'euclideità oppure la non euclideità dello spazio, la propagazione rettilinea (nel senso euclideo) oppure la propagazione rettilinea (nel senso non euclideo) delle radiazioni elettromagnetiche.

Nella Tav. V si illustra il perchè la Terra concava appare convessa e come apparirebbe la Terra concava vista dalla Luna e dal Sole. Si tratta di problemi identici a quello delle parallassi, con la sola differenza che qui osservatore ed astro osservato si scambiano di posto: l'osservatore si trova sull'astro (Luna o Sole) o in un qualunque punto lontano dalla Terra, dal quale osserva la Terra stessa, o, più precisamente, il punto (e il suo simmetrico) da lui occupato prima, quando dalla Terra, tangenzialmente alla superficie di questa, osservava l'astro.

Esaminiamo la figura a sinistra. Ricordiamo anzitutto, ancora una volta, che *qualsiasi oggetto, si trovi esso sulla Terra o nel cielo, appare all'osservatore trovarsi nella direzione con la quale i raggi luminosi, uscenti dall'oggetto, entrano nel suo occhio o nella camera oscura di una macchina fotografica.* Una persona, situata nel punto G, osserva un certo oggetto, posto al di sopra della Terra nel punto H. I raggi uscenti da H, seguendo una traiettoria curva da H a G, entrano nell'occhio (o nella camera oscura) dell'osservatore nella direzione perpendicolare alla verticale in G: a tale osservatore H appare trovarsi in A. Ad un altro osservatore, situato in F, H appare trovarsi ugualmente nella direzione perpendicolare alla verticale in F, e cioè ancora in A. Le osservazioni, effettuate sia da chi trovasi in G sia da chi trovasi in F, sono perfettamente identiche, per le identiche ragioni. L'oggetto in esame trovasi, tuttavia, in H e non in A, e ciò d'accordo con la nostra ipotesi che lo spazio cosmico non è uniforme, che le geodetiche non sono euclidee, ma coincidenti con le linee di forza del campo da noi considerato, per cui il raggio luminoso, che sfiora tangenzialmente la superficie terrestre, è *curvilineo.*

Gli osservatori in G e in F, se partono dall'ipotesi dello spazio non euclideo, attribuiscono all'oggetto osservato la posizione di H; se, invece, partono dall'ipotesi dello spazio piano, allora attribuiscono all'oggetto osservato la posizione di A.

Applicando la *tangente curvilinea,* vediamo che l'arco concavo FBG appare come se fosse l'arco IKJ, con la stessa rotondità convessa che l'arco FBG presenterebbe se fosse osservato dal punto A. Supponiamo ora che, invece di effettuare osservazioni dai punti F e G, l'osservatore si trovi in alto, al di sopra dell'arco FBG, nel punto H, guardando in basso verso la stessa espansione concava; dirigendo lo sguardo a sinistra, vede l'orizzonte (o circolo limite): questo effettivamente si trova in F; ma poichè ogni oggetto appare trovarsi nella direzione con la

quale i raggi luminosi entrano nell'occhio, o nella camera oscura, il punto *F* gli appare trovarsi nel punto *I*; guardando a destra, il punto *G* gli appare trovarsi nel punto *J*. I raggi uscenti da *F* e da *G* entrano nell'occhio dell'osservatore, situato nel punto *H*, nella direzione delle linee *IH* e *JH*, e pertanto *F* appare trovarsi in *I* e *G* appare trovarsi in *J*. L'orizzonte sensibile, per l'osservatore in *H*, è in *F* e *G*; l'orizzonte apparente è, invece, in *I* e *J*. Quindi l'arco *FBG* appare invertito nell'arco *IKJ*. La Terra concava, in tal modo, appare convessa, essendo *L*, centro dell'arco *IKJ*, il suo centro apparente.

La « prova » principe della « convessità » della Terra, che si trova in ogni trattato scientifico e in ogni testo scolastico, si fonda sull'ipotesi dello spazio piano e della propagazione rettilinea (in senso euclideo) dei raggi luminosi. Sono state scattate fotografie da grandi altezze per mostrare la curvatura « convessa » della Terra. Se, invece, formuliamo l'ipotesi di uno spazio non euclideo con traiettorie o geodetiche *rettilinee non euclidee* percorse dalla luce, le stesse fotografie *provano* che la Terra è *concava*.

Con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto or ora, supponendo in *H* il Sole o la Luna, si perviene alla conclusione che la Terra vista da un osservatore situato, appunto, sul Sole o sulla Luna (Tav. V, figura a destra) appare convessa.

Il punto d'osservazione è *H*, che supponiamo rappresenti la Luna. La parallasse del punto *H*, visto da *F* o da *G*, è, in figura, di 19° 30′ e l'intera superficie della Terra concava è visibile da tale altezza, sotto un angolo di 39 gradi, come la corda dell'arco *IKJ*.

La reale parallasse della Luna è di 57′ di grado: quindi la Terra concava appare come un corpo convesso nello spazio, con una superficie visibile sotto un angolo di 114′ di arco. La Terra appare distante dalla Luna 384.000 chilometri, una distanza, cioè, tale, per cui il raggio terrestre è visto sotto un angolo di 57′ di grado.

Similmente la parallasse del Sole è di 8″, 8 di arco e la Terra, dal punto *H*, supponendo che questo punto sia il Sole, è vista sotto un angolo di 17″,6; la Terra appare quindi distante 149.600.000 km. I raggi, dai lati dell'apparente Terra convessa, o i raggi effettivi dai lati della Terra concava, entrano nell'occhio sotto quell'angolo parallattico e la Terra appare proiettata nello spazio come un corpo convesso. *H* è l'inverso del punto *A*, e la distanza *HB*, nello spazio endosferico, è l'equivalente della distanza *BA*, considerata nello spazio uniforme. Il punto *M* è l'inverso del punto *D*, *N* l'inverso del punto *E*. Similmente 3 è l'inverso di 1; 4 l'inverso di 2; 7 l'inverso di 5; 8 l'inverso

di 6. Ciò significa che l'arco $3 \frown B$ e il segmento $\overline{1\,B}$ hanno numericamente uguale lunghezza, con la solita avvertenza di esprimere la lunghezza di $3 \frown B$ in unità di misura non euclidee, e la lunghezza di $\overline{1\,B}$ in unità di misura euclidee.

Chiuderemo questo capitolo soffermandoci su una delle « prove » della convessità della Terra, addotte dall'Astronomia classica : si tratta di una fotografia infrarossa del Monte Aconcagua, scattata nel 1931, da un aeroplano, ad una distanza di 460 chilometri. La Tav. VI illustra le due interpretazioni, la convessa e la concava. Il disegno originale dell'interpretazione convessa è di Alberto H. Bumstead ed apparve nella rivista americana Geographic Magazine del maggio 1931 (pag. 635). Sulla base dell'ipotesi dello spazio euclideo il disegno di Bumstead è, ovviamente, corretto ; sulla base dell'ipotesi dello spazio non euclideo, il correlativo disegno dell'interpretazione concava è ugualmente corretto. La suddetta rivista americana pubblicava, con un lungo articolo, anche una fotografia, sotto la quale si leggeva : « La prima fotografia scattata per mostrare finalmente la curvatura convessa della Terra ». In base alla nostra ipotesi, non meno legittima della classica, vi potremmo scrivere invece : « La prima fotografia scattata per mostrare finalmente la curvatura concava della Terra ! ».

CAPITOLO XI.

Cosa vi è " al di fuori " della sfera cava ?

L'inverso del raggio della Terra copernicana (semiretta) e la misura in termini non euclidei della profondità della Terra concava – Non vi è « al di fuori » – L'infinito esosferico e l'infinito endosferico.

Alla domanda : Cosa vi è « al di fuori » della sfera cava? già è stata data una risposta nel capitolo VI. Ma conviene soffermarci su tale questione sia da un punto di vista scientifico che da quello psicologico. Nell'inversione, abbiamo detto, il raggio della Terra solida si muta nella semiretta uscente dall'estremo del raggio come prolungamento di questo. Poichè l'Universo è concepito come un campo ove le massime concentrazioni di energia si trovano nel centro, e ove, via via che da tale centro ci si allontana, la densità dell'energia decresce (Tav. III) fino allo spazio d'esperienza ed *oltre*, l'inversione, di cui sopra, ha un immediato significato fisico. La profondità della Terra concava non differisce numericamente dalla lunghezza del raggio della Terra classica : se r è il numero finito di chilometri (euclidei) misurato dal raggio della Terra solida, è ancora r il numero finito di chilometri (non euclidei) misurato dalla profondità della Terra cava. A questi chilometri non euclidei corrispondono, come abbiamo visto, segmenti disuguali, crescenti, essendo l'ultimo *infinito*. Ciò significa che la profondità della Terra *non* ha fine. Alla domanda : Cosa vi è « al di fuori » della sfera cava ?, si risponde che non vi è « al di fuori ». La materia si va attenuando indefinitamente, la sua densità via via descresce tendendo a zero. L'Universo, ha una densità tanto più elevata quanto più ci si avvicina alle sorgenti del campo ; allontanandoci da queste, il campo va attenuandosi fino ad annullarsi all'infinito. I punti singolari del campo sono le masse materiali (i corpi celesti), che, nel linguaggio di Einstein, sono grandi concentrazioni di energia. La stessa Terra costituisce, da questo punto di vista, una «zona singolare » del campo. « Finora non siamo riusciti, scrive Einstein (30, *b* ; 256 e 30, *c* ; XIX) a formulare una fisica basata sul puro campo.

...Dobbiamo ancora ammettere la coesistenza del binomio campo e materia... Se si introduce il concetto di campo come *concetto elementare*, cioè come elemento della descrizione fisica non ulteriormente riducibile, pare a me impossibile introdurvi accanto anche la particella come concetto elementare, poichè quest'ultima dovrebbe venir trattata come singolarità del campo ».

Vorrei, a questo punto, accennare ad un aspetto psicologico connesso con la domanda che ci siamo posta all'inizio, domanda che mi è stata rivolta frequentemente. Siffatta domanda ha uno stretto legame con le idee « euclidee » così tenacemente radicate nelle menti, ciò che non deve, naturalmente, sorprendere affatto. Si cade nell'errore di pensare al nuovo concetto nei termini della concezione tradizionale del mondo. L'omogeneità dello spazio delle ordinarie esperienze, essendo estremamente familiare, non è facilmente sostituibile con un concetto di spazio non omogeneo. Pertanto, mentre *l'infinito spaziale* in termini non euclidei è *dentro* la sfera cava e il finito sta *al di fuori*, si continua a pensare alla sfera cava del nuovo concetto in termini euclidei, concependo ancora *l'infinito spaziale* « al di fuori » e il *finito* « al di dentro ». In ciò consiste la maggiore difficoltà per « vedere » mentalmente il nuovo mondo. Abbiamo già detto che pensare al concetto classico nei termini del nuovo concetto e viceversa urta contro il più elementare buon senso ; è, cioè, *un controsenso*. È naturale, quindi, per chi pensa alla sfera cava in termini euclidei, domandarsi cosa vi sia « al di fuori », ma ciò significa non aver afferrato il nocciolo di tutto il problema. La Tav. XVI non aiuta, per la verità, ad eliminare tale confusione, ma non ho ritenuto modificarla per tema di rendere, per altri rispetti, meno comprensibile la concezione che vi si vuole rappresentare. Inoltre, ad accrescere la difficoltà, sta naturalmente il vecchio concetto, sempre presente nell'immaginazione, con il suo « pianeta-Terra », sulla cui superficie, supposta convessa, si concentra essenzialmente l'attenzione. Tutto si riduce, quindi, ad approfondire i termini della nuova concezione del mondo, senza farvi interferire indebitamente i termini della concezione classica. In tal modo la domanda formulata al principio di questo capitolo si rivelerà priva di significato e di contenuto logico.

CAPITOLO XII.

I due Universi.

Validità dei due sistemi – Qual'è il più valido, il più « vero » ? – Archimede e la misura della superficie della sfera – Il punto di vista del fisico moderno di fronte al problema cosmogonico – La Teoria Endosferica spiega esaurientemente i punti deboli della Teoria classica : la simmetrica caduta dei raggi cosmici sulla Terra ; il comune comportamento delle Cefeidi ; le *infinite* masse implicite nella legge di Newton ; l'uniformità dello spazio cosmico ; la favolosa durata dei raggi luminosi ; la dispersione di quasi tutta l'energia emessa dal Sole ; la densità del « pianeta » Terra maggiore di quella di tutti i corpi del sistema solare ; l'abitabilità, privilegio della Terra ; le cause delle differenze di temperatura nel corso delle stagioni ; la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna ; l'imperfetta analogia tra l'atomo e il sistema planetario ; l'origine del magnetismo terrestre ; i vertiginosi voli di astri colossali con densità quasi nulla ; le cause del movimento di deriva dei continenti ; le estrapolazioni – Perchè la Teoria Endosferica è più « vera » (valida) della Teoria classica.

Nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo...
EINSTEIN

La legge di trasformazione, che lega lo spazio euclideo della concezione classica del mondo con lo spazio non euclideo a curvatura variabile della concezione endosferica, implica che ogni relazione valida per una delle due concezioni è necessariamente valida anche per l'altra. La coerenza fra le relazioni esistenti in uno dei due spazi implica la coerenza fra le relazioni esistenti nell'altro. Già ci siamo imbattuti in casi simili nello sviluppo delle matematiche ; ad es., a proposito della non contradditorietà della geometria non euclidea (ellittica o iperbolica), scrive Conforto (91 ; 222) : « La prova della non contradditorietà della geometria non euclidea è stata raggiunta sulla base della geometria proiettiva, la quale, a sua volta, si fonda sulla geometria euclidea. Ora, l'appoggiarsi alla geometria euclidea per dimostrare la coerenza logica della geometria non euclidea potrebbe sembrare un circolo vi-

zioso. Ciò però non è, perchè si può provare che, ammessa la coerenza logica della geometria euclidea, si trae la coerenza logica della geometria non euclidea ».

Fra i due spazi, dunque, vi è una corrispondenza puntuale. I due concetti del mondo, i due universi, pur così profondamente diversi, tuttavia si equivalgono. Purchè alle grandezze, che figurano nelle formule classiche, si diano i corrispondenti valori non euclidei, si possono ottenere per il mondo endosferico tutti quei sorprendenti risultati, attorno alla descrizione e alle previsioni di fenomeni celesti, che, per la loro precisione, sembravano costituire la indiscutibile prova della « verità » della concezione esosferica del mondo. Le medesime formule (e ne abbiamo visto un esempio nel capitolo VI) possono applicarsi, con l'avvertenza anzidetta, sia al sistema classico che a quello cosmocentrico.

Ricordiamo quanto abbiamo già scritto nel capitolo VII, Parte I. Vale la pena ripeterci : la matematica esprime certi rapporti astratti, che possono applicarsi ai fenomeni fisici, senza però identificarsi mai con i rapporti concreti, con i quali si stabilisce, di volta in volta, una corrispondenza isomorfa. Ciò è reso ancora più evidente dalla seguente osservazione di Poincaré (74, *a* ; 155) : « Nessuna teoria sembrava più solida di quella di Fresnel, che attribuiva la luce ai movimenti dell'etere. Poi invece le si preferì la Teoria di Maxwell. Tuttavia entrambe le teorie soddisfacevano allo scopo precipuo di prevedere fenomeni ottici. Le equazioni differenziali esprimono dei rapporti e, se questi rapporti conservano la loro realtà, le equazioni differenziali restano vere. Esse ci insegnano che vi è un certo rapporto fra qualcosa e qualche altra cosa : solo che questo qualcosa un tempo lo chiamavamo *movimento* e ora lo chiamiamo *corrente elettrica* ».

Un'equazione della *stessa forma* si è presentata nella cinematica dei fluidi incompressibili, nella teoria dell'attrazione newtoniana, nell'elettrostatica e nella magnetostatica.

Il fatto, dunque, che una stessa equazione o formula sia valida ad esprimere rapporti esistenti in campi diversi non è nuovo. Questo fatto è, anzi, del più alto interesse, perchè rivela l'esistenza di verità profonde, insospettate e riposte in seno alla natura.

Vogliamo anche accennare alle equazioni della geometria analitica. Cosa rappresentano le equazioni $ax + by + c = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$? A seconda : se le riferiamo al piano, rappresentano, rispettivamente, una retta e un cerchio ; se le riferiamo allo spazio tridimensionale, rappresentano, rispettivamente, un piano e un cilindro ; ed altre interpreta-

zioni potremmo dar loro se le riferissimo a spazi a più di tre dimensioni. Le equazioni, quindi, non hanno un senso unico, assoluto, ma un senso dipendente dal relativo sistema di riferimento e dal significato, che, di volta in volta, attribuiamo alle grandezze e alle variabili che vi figurano.

Nell'esame, che stiamo facendo, dei due universi messi a confronto, dobbiamo stabilire quale dei due è più ricco di « verità ». Uno dei due spazi è il vero, è il mondo reale; l'altro è l'espressione *astratta* del primo. Data la relazione matematica che lega i due spazi, per ragioni di comodità, di semplicità di linguaggio, di intuibilità, può convenire riferirsi allo spazio astratto ed esprimerci quindi nei termini propri di tale spazio invece che riferirci allo spazio reale, che si presenta meno intuitivo e più complesso : lo scopo prefissoci di ottenere certi risultati, per quanto abbiamo detto, viene raggiunto lo stesso.

La geometria tradizionale presenta di ciò un esempio cospicuo. La ricerca dell'area della superficie sferica costituisce, rispetto agli analoghi problemi relativi alle superficie laterali del cilindro e del cono, un problema più difficile e, dal punto di vista concettuale, *essenzialmente* diverso, perchè, non solo si tratta di una superficie curva, ma, a differenza di quelle laterali del cilindro e del cono, la superficie sferica *non è sviluppabile* sul piano. Archimede superò le difficoltà del problema, confrontando la superficie sferica con certe speciali superficie rotonde (*sviluppabili*), costituite da zone coniche, troncoconiche e, eventualmente, cilindriche, che si ottengono, ciascuna, facendo ruotare un poligono regolare a un numero pari di lati, inscritto in un circolo massimo della sfera, intorno ad un diametro, che ne congiunga due vertici opposti. Il metodo originale escogitato da Archimede doveva condurre, nell'epoca moderna, alla creazione dell'Analisi infinitesimale. Egli trovò che una superficie sferica è equivalente alla superficie laterale del suo cilindro (equilatero) circoscritto. Il grande Siracusano, consapevole della importanza del suo ritrovato, desiderò che sulla sua tomba si incidesse, come epigrafe, la sfera inscritta nel cilindro equilatero. E fu questo l'indizio che permise a Cicerone, durante la sua questura in Sicilia, di scoprire, alle porte di Siracusa, un secolo e mezzo dopo la morte di Archimede, la sua tomba, occultata da sterpi e da tutti dimenticata.

Cosa fece, dunque, Archimede ? Poichè la superficie sferica non è sviluppabile, con un metodo ingegnoso, egli si riferì a certe superficie sviluppabili, determinando l'equivalenza fra l'una e le altre : in particolare riuscì a stabilire che la superficie sferica è equivalente a un rettangolo avente per base la circonferenza di un cerchio massimo e per

altezza il diametro della sfera. Poichè la geometria delle superficie non sviluppabili presenta gravi difficoltà, Archimede misurava le aree di superficie sviluppabili equivalenti a quelle, sfruttando la semplicità della geometria del piano euclideo. In altre parole, misurando l'area di un certo rettangolo, egli intendeva misurare l'area di una superficie sferica. Mi si consenta di esprimermi così: esiste un rettangolo, che è la superficie sferica « sviluppata astrattamente » sul piano. La formula $A = 4 \pi r^2$, che esprime l'area della superficie sferica, è quella stessa che esprime l'area di un certo rettangolo. Pertanto, a seconda del significato che noi attribuiamo alle grandezze, che figurano in detta formula, potremo riferirci indifferentemente ad un rettangolo oppure ad una superficie sferica, ad una figura sviluppabile sul piano o ad una figura non sviluppabile, alla geometria euclidea o a quella non euclidea.

Non altrimenti accade per quanto riguarda la geometria euclidea del mondo esosferico e la geometria non euclidea del mondo endosferico. Data la semplicità della geometria euclidea rispetto a geometrie non euclidee, stabilita una legge di equivalenza, che ci consenta applicare le nostre formule, indifferentemente, all'uno o all'altro spazio, è indubbiamente più agevole riferirci allo spazio piano, anche se ci appare concreto il mondo endosferico e astratto quello esosferico: potremo continuare, per convenienza, a servirci dello spazio classico, intendendo operare tuttavia nello spazio curvo. Ciò non significa che, operando nello spazio piano ed ottenendo nel campo sperimentale risultati più che soddisfacenti, *per questo motivo debba* considerarsi provato che lo spazio reale è piano. Sarebbe lo stesso che chi misurasse un certo rettangolo e ottenesse risultati in buon accordo con certe esperienze, volesse per questo motivo arguirne che reale è esso rettangolo e *non* la superficie sferica, che egli, misurando quel rettagolo, ha effettivamente misurato. Scrive Eddington (29 ; 48): « Si può rappresentare la superficie curva della Terra su un piano, come per esempio nella proiezione di Mercatore; ma non per questo perdono significato i lavori dei geodeti volti ad accertare la vera figura della Terra. Coloro che *per questa ragione* sono in favore dell'Universo piano, per esser coerenti dovrebbero anche sostenere l'idea della Terra piana ».

Pertanto le formule della Meccanica Celeste, per l'equivalenza esistente tra spazio esosferico e spazio endosferico, mantengono la loro piena validità ; anzi, per le ragioni anzidette di intuibilità e di comodità, *conviene* ancora operare nello spazio *astratto* del concetto classico, pur ammettendo che *lo spazio concreto è quello endosferico.*

A questo punto il fisico potrebbe dire: il sistema attuale del mondo è più che soddisfacente. I risultati positivi ottenuti, mediante le formule da noi ad esso applicate, non ci spingono affatto a mutare tale concezione. Finchè non ci si offre un sistema che, oltre ad offrire tutti i lati positivi del vecchio, non colmi almeno uno dei punti deboli del sistema tradizionale, non abbiamo alcun interesse di cambiare l'attuale immagine fisica del mondo. Poichè i due universi sono in tutto e per tutto equivalenti, noi rimaniamo con il vecchio, che presenta il vantaggio di uno spazio intuibile e comodo com'è quello piano di Euclide.

Questo, dunque, potrebbe dire ragionevolmente il fisico. Precisiamo, allora, che equivalenza non significa identità e che i due universi, pur essendo equivalenti, sono profondamente diversi. E ricordando alcuni lati deboli dell'attuale concezione del mondo, metteremo alla prova la Teoria del campo universale.

Nel capitolo primo ci siamo lungamente soffermati su tali punti deboli. Esaminiamoli nuovamente alla luce della nuova concezione del mondo, sulla cui genesi vogliamo ancora soffermarci.

Il campo, come abbiamo detto nel capitolo III, in seguito al suo affermarsi nel secolo scorso, si presenta come la forma più naturale di attività dell'energia: l'Universo, questa immensa riserva di energia in incessante attività, appare, quindi, al fisico moderno come un campo, come *il campo*. Einstein concepì già il campo universale senza precisarne le sorgenti; il mondo endosferico si presenta nella configurazione di un campo rivelato da sorgenti ben determinate. Siffatta configurazione, invertita, dà luogo allo spazio uniforme di Euclide, cui, per millenni, a causa di fattori ottici non altrimenti spiegabili, si diede credito. L'avvento del campo consente una esauriente spiegazione dei fattori ottici nella configurazione di uno spazio curvo: consente, cioè, una teoria nuova, in accordo con le osservazioni.

E qui occorrono alcune considerazioni ancora. Invertendo la configurazione del campo, abbiam detto, si ottiene lo spazio euclideo, e viceversa. La formula matematica di trasformazione avrebbe potuto condurre dallo spazio euclideo ad una configurazione spaziale che non fosse in alcun modo applicabile a noti fenomeni fisici: il fatto invece che tale configurazione spaziale corrisponda a quella di un campo, nel quale possono spiegarsi tutti i fenomeni celesti che avevano trovato già una spiegazione nel vecchio spazio, potrebbe apparire come una coincidenza singolare. Tale singolarità, tuttavia, apparirà meno sorprendente non appena si rifletta che è il campo universale che è stato pensato come uno spazio uniforme, a causa dei fattori ottici interpretati alla

stregua dello spazio d'esperienza, *e non viceversa*. Che poi le sfere ottiche si mutino in piani, il centro stellare nel piano all'infinito, le coppie di linee di forza in rette parallele, tutto ciò, *di per sè*, non è una « coincidenza », nel senso che fra le geodetiche curvilinee del campo (percorse dai raggi luminosi), il comportamento del quale è soggetto a leggi ben determinate, e il *prolungamento* dei raggi luminosi nella direzione in cui entrano nell'occhio, non deve sorprendere che possa sussistere una relazione esprimibile matematicamente. Senonchè parlare di *prolungamento* e parlare di *retta* o *geometria euclidea* è esattamente la stessa cosa.

Fondamentale è il punto di partenza : noi concepiamo l'Universo come un campo, perchè gli sviluppi ultimi e più imponenti della fisica ci fanno apparire il campo come la forma basilare e più naturale di attività dell'energia. Uno studio accurato ci ha rivelato che il mondo classico ha la configurazione invertita di tale campo, dovuto a fattori ottici, che, prima dell'avvento del campo, non erano altrimenti interpretabili.

Non sarà inutile, tuttavia, ricordare che la storia della scienza conosce delle *singolari* coincidenze. « La velocità con cui avviene la propagazione delle radiazioni hertziane, scrive Persico (71, c ; 65), non si può desumere con il ragionamento elementare, ma, precisando questo ragionamento con il sussidio analitico, si trova che questa velocità deve essere (nel vuoto) proprio eguale a quel coefficiente c, che collega le intensità dei campi magnetici ed elettrici indotti con le intensità delle correnti, che li inducono. La misura diretta della velocità delle onde hertziane (e anche della luce) dà 300.000 km/sec., cioè, in unità C.G.S., $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec., in perfetto accordo con il valore del coefficiente c determinato con misure elettriche. È questa una delle più brillanti conferme sperimentali di questa teoria e dell'applicabilità di essa anche alla radiazione luminosa ». Si ha, dunque, anche qui, una « straordinaria coincidenza », come scrive in proposito James R. Newman, che trova tuttavia la sua spiegazione nella riposta connessione di profonde leggi della natura.

Esaminiamo ora i punti deboli anzidetti.

1) *I raggi cosmici e la loro simmetrica caduta sulla superficie terrestre.* — Le sorgenti del campo sono al centro della Terra cava. La «strana combinazione », come scrive Eddington, della caduta simmetrica dei raggi cosmici sulla Terra convessa in rapido volo intorno al Sole, non ha più luogo, ovviamente, nella Terra concava, dove siffatta simmetria di caduta, essendo la fonte dei raggi cosmici al centro, è un fatto del tutto prevedibile e naturale.

2) *Le Cefeidi e il loro comune comportamento.* — Le comuni caratteristiche delle 40 o 50 Cefeidi, di periodo approssimativamente uguale, aggirantesi in media sui 5 giorni, la loro «grandissima rassomiglianza», come osserva Eddington, farebbero pensare a un qualche legame fisico, ad azioni reciproche dovute a raggruppamento: ma le Cefeidi copernicane distano fra loro miliardi di chilometri *euclidei*. Esse, come mi scriveva il Prof. Rosino, «non sono fisicamente associate». Nel mondo endosferico le Cefeidi distano fra loro altrettanti miliardi di chilometri *non euclidei*. Come dicevamo nel cap. IV di questa Parte III, mentre i chilometri euclidei misurano distanze costanti e, essendo lo spazio omogeneo ed isotropo, l'energia (molto rarefatta) è distribuita in essi uniformemente, i chilometri non euclidei dello spazio endosferico non omogeneo, non isotropo, misurano «distanze variabili», funzioni del locale raggio di curvatura; quanto più si accorciano tanto più densa è l'energia in essi distribuita. *Numericamente* le Cefeidi classiche distano fra loro quanto le Cefeidi endosferiche, ma da un punto di vista fisico la posizione loro è assai diversa. Mentre nel sistema classico esse non possono essere fisicamente associate, nel nuovo sistema è possibile e prevedibile il contrario: la grande somiglianza fra di esse, attribuita solo al caso secondo la vecchia teoria, nella nuova è suscettibile di una spiegazione razionale.

3) *La legge di Newton e il suo implicito mondo di infinite masse.* — La legge di Newton implica un mondo di infinite masse. Poichè tale legge governa l'intero universo, il sistema solare e le stelle ad esso vicine ruotano attorno al centro della nostra Galassia; questo enorme sistema comprendente il Sole percorre, a sua volta, un'orbita attorno ad un altro centro di masse (astri) ancora maggiori, e questo, seguito da tutta l'immensa famiglia di astri, che gravita su di lui, girerà anche esso attorno ad un altro astro (o altri astri) di massa ancora più imponente e a distanze sempre maggiori, e così via, fino all'infinito! Ma come ammettere infinite masse, infiniti astri? La Teoria della Relatività Generale tende ad affermare un universo finito, ma, secondo gli ultimi sviluppi della Teoria, si è molto incerti su tale asserto. La Teoria di Einstein non elimina nè sostituisce totalmente la Teoria di Newton, la quale, applicata al mondo classico, conduce inevitabilmente a un mondo infinito, di infiniti astri, conduce a concetti che vanno al di là della fisica, cioè alla «metafisica»! Nella nuova concezione, all'infinita estensione classica, costellata da infinite masse, corrisponde la concentrazione delle masse nel centro universale, dove la materia raggiunge

densità estremamente elevate; in luogo di un fenomeno di estensione e di dispersione di masse e di forze cosmiche, si ha un fenomeno di concentrazione e di potenza. Nel nuovo concetto le densità assumono valori grandissimi tendendo a ridurre a valori minimi le « distanze » nel senso spiegato al numero 2). Il paradosso di un Universo di infinite masse, cui conduce la legge di Newton applicata al mondo esosferico, con la Teoria endosferica cade.

4) *Spazio cosmico uniforme.* — Nella concezione classica lo spazio cosmico si ammette uniforme. Lämmel, Eddington ed altri, riferendosi allo spazio universale, per il valore tendente a zero della densità della materia di cui è costituito, lo dicono « deserto », « vuoto ». Ogni punto, direzione o giacitura dello spazio non differisce in nulla da qualsiasi altro punto, direzione o giacitura, essendo lo spazio omogeneo ed isotropo. Eddington si ribella a questo fatto non « naturale » quando scrive che « lo spazio fisico non può essere privo di caratteristiche », cioè di curvature, per le quali i punti dell'Universo differiscono l'uno dall'altro così come differiscono le direzioni uscenti da uno stesso punto.

« L'*identità indifferenziata* e il nulla, scrive ancora Eddington (29, *a*; 72), non si possono distinguere in via filosofica. Le realtà della fisica sono inomogeneità, eventi, cambiamenti. Quando poi infine, per degradazione termodinamica dell'energia, l'Universo raggiunge l'identità indifferenziata, quello è il termine dell'Universo fisico». Qui vogliamo annotare quanto scrive Giovanni Giorgi: « I grandi fondatori del secondo principio di termodinamica, quello che obbliga all'aumento costante dell'entropia, non hanno mai preteso di applicarlo nè al mondo atomico nè a quello organico. I meccanismi più intimi e più riposti, dove sono in giuoco individualmente i corpuscoli elementari, sfuggono alle restrizioni del secondo principio di termodinamica ».

Ogni punto e ogni direzione dello spazio endosferico sono caratterizzati dalla locale curvatura dello spazio medesimo, come abbiamo detto nel cap. V; ciò, ripetiamo, è in accordo con il pensiero di autorità scientifiche del valore di Eddington, per es., il quale trova più plausibile uno spazio dotato di caratteristiche (di curvature), che non uno spazio piano. Lo spazio non euclideo del mondo endosferico è a curvatura variabile: ciò comporta la *non rigidità* dei moti, che abbiamo già trattata. L'esperienza ordinaria nello spazio ordinario, praticamente euclideo, in prima approssimazione ci presenta movimenti rigidi. Ma, non appena si rifletta al comune fenomeno della temperatura, che contrae e dilata i corpi, e al fatto che, se dalla casa vado nella strada, se

dal piano vado in collina, ecc., la temperatura subisce delle variazioni (grandi o piccole, che siano), si deve ammettere che anche nello spazio ordinario, e considerando solo il fenomeno temperatura, i moti non sono rigidi.

Se appare poco « naturale » lo spazio uniforme euclideo, ugualmente poco « naturali » sono i moti rigidi che tale spazio implica.

Non appena penetriamo nella natura del mondo che ci circonda, è l'eterogeneità e non la uniformità, che ci colpisce, ed, esaminandolo più profondamente, troviamo che lo spazio fisico non è uniforme, e, quindi, i suoi moti non sono rigidi. Considerando, quindi, il semplice esempio della temperatura che dilata e contrae i corpi, se vogliamo osservare il necessario rigore del metodo scientifico, non si può non ammettere la non rigidità dei moti anche nel nostro spazio d'esperienza. Da un punto di vista quantitativo tuttavia le alterazioni subite dai corpi in moto nello spazio ordinario ci appaiono minime, trascurabili : le variazioni di temperatura hanno sui corpi, nel senso anzidetto, effetti minimi. *La causa di gran lunga più importante delle deformazioni dei corpi in moto è la curvatura dello spazio.* Le curvature spaziali, in vicinanza della superficie terrestre, sono trascurabili. Ma, a misura che si avanza negli spazi celesti, le curvature si accentuano e le alterazioni dei corpi in moto diventano via via più sensibili ; di conseguenza, per es., anche i razzi lanciati sulla Luna ed attorno alla Luna devono aver subito tali modificazioni ; ma, poichè le contrazioni e le dilatazioni avvengono in egual misura in ogni parte di un corpo, gli apparecchi, ad es., del Lunik III hanno ugualmente funzionato, inviando segnali dalla zona lunare e fotografando la faccia « nascosta » del « satellite della Terra ».

L'uniformità dello spazio e la conseguente rigidità dei moti costituisce uno dei punti più deboli della concezione esosferica del mondo.

La non rigidità dei moti è stata già ammessa dalla Teoria della Relatività Generale, nella quale si configura uno spazio a curvatura variabile. « Il campo gravitazionale, scrive Einstein (30, *b* ; 240) deforma i miei regoli rigidi ». La differenza fra la Teoria della Relatività e il nuovo concetto, come preciseremo nel cap. XIV, non è qualitativa, ma solo quantitativa. Le variazioni di dimensione dei corpi in moto, previste dalla Teoria della Relatività, sono minime. La Teoria endosferica del campo prevede variazioni molto più sensibili.

5) *Favolosa durata dei raggi luminosi.* — La favolosa durata dei raggi luminosi (anni-luce) non è frutto d'esperienza, ma consegue ne-

cessariamente dalle premesse da cui parte l'astronomia classica, e cioè : Terra convessa, spazio cosmico euclideo ed estrapolazioni in esso di relazioni come la (45) e di leggi fisiche verificate nei nostri laboratori, di cui abbiamo parlato nel cap. XIII della Parte I. La luce della grande Nebulosa di Andromeda impiega due milioni di anni per giungere fino a noi, quella delle Galassie più distanti due miliardi di anni. La luce, con una frequenza che si calcola fra 400 e 750 bilioni di oscillazioni al secondo, costituendo un tenuissimo «filo di energia» in moto con una velocità di 300 mila km. al secondo, avrebbe una possibilità di «sopravvivenza» maggiore di quella di un astro, che, per es., dopo un'esistenza di due miliardi di anni, per cataclismi siderei o per altre cause, scomparisse! Queste mostruose durate di raggi luminosi cosmici, se non fossero la necessaria conseguenza delle ipotesi su cui si basa tutta l'astronomia classica, probabilmente sarebbero rifiutate dai fisici.

Anche nel nuovo concetto si ammette una sensibile durata della luce. L'astronomo danese Olaf Roemer, nel 1675, misurò i periodi dei satelliti di Giove, ma, verificandoli in epoche diverse, ottenne risultati differenti. Poichè il periodo impiegato da un satellite per percorrere la sua orbita attorno a Giove doveva ritenersi costante, attribuì la differenza di quei risultati al differente tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza Giove-Terra, quando la Terra si trova al di là del Sole e quando invece la Terra si trova fra il Sole e Giove. La differenza tra le distanze che la luce deve percorrere nel primo e nel secondo caso è uguale al diametro dell'«orbita terrestre». Conoscendo quindi tale differenza di distanze e il tempo impiegato a percorrerla (circa 1000 secondi) Roemer calcolò per la velocità della luce il valore di 307.200 chilometri al secondo, dimostrando l'errore dell'assioma kepleriano : «lucis motus non est in momento, sed in tempore», e fornendo, invece, una ragione fisica al concetto di Empedocle, fondato su pure argomentazioni teoriche, secondo il quale la luce richiede del tempo, per propagarsi attraverso lo spazio : egli asseriva, infatti, che «la luce proveniente dal Sole raggiunge lo spazio interposto prima di raggiungere l'occhio o la Terra». Il risultato di Roemer conserva ovviamente la sua validità nel nuovo concetto.

Di fronte tuttavia alle mostruose durate della luce, ci possiamo porre questa domanda : l'equivalenza fra i due spazi comporta il verificarsi di siffatte favolose durate anche nello spazio endosferico ? Sembrerebbe doversi rispondere senz'altro affermativamente. Possiamo però fare la seguente considerazione : mentre il vecchio spazio non consente una interpretazione diversa da quella ammessa, circa i metodi per la

determinazione delle distanze stellari e le conseguenti durate della luce, la struttura del nuovo mondo sembra poter dar adito ad una più attendibile interpretazione, sia per quanto riguarda detti metodi che per quel che concerne il comportamento della luce nel mezzo del campo universale. Il vantaggio del concetto endosferico rispetto a quello esosferico consiste appunto in questo, che nel primo possono avanzarsi ipotesi e spiegazioni che nel secondo non si potrebbero verosimilmente avanzare. Pur rinunciando a proporre ora nuove ipotesi al riguardo, mi limito ad affermare questo : le favolose durate della luce possono cadere mediante interpretazioni possibili e assai più plausibili nel nuovo che non nel classico concetto del mondo.

6) *Dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole.* — La quasi totalità dell'energia emessa dal Sole, nel sistema classico, va perduta. Dei 100 miliardi di miliardi di Kwh., che il Sole irradia ogni secondo, poco più di 20 miliardesimi vengono assorbiti dai pianeti, meno di 2 miliardesimi vengono assorbiti dalla Terra. Analoga dispersione si ha delle incalcolabili energie irradiate da bilioni di Stelle-Soli. Nemmeno la Teoria della Relatività, ammettendo lo spazio ellittico, consente supporre che venga recuperata detta colossale quantità di energia solare (e stellare), la quale, dunque, come scrive Lämmel, «si sprofonda nel nulla infinito e irraggiungibile ». La legge della conservazione dell'energia, la « grande legge della parsimonia della natura », come la chiamava Maxwell, viene violata. Nel mondo endosferico invece torna a regnare il principio per cui ogni attività, entro un sistema, viene realizzata con il minor dispendio possibile di energia : *non si ha la benchè minima dispersione dell'energia solare e stellare.* L'energia emessa dal Sole viene assorbita dalla superficie concava della Terra ; le radiazioni, che non raggiungono la superficie terrestre, girano negli spazi verso l'altra sorgente del campo, il Centro Stellare. Il nuovo concetto presenta un'immagine fisica del mondo, che, a differenza del concetto classico, non urta contro una delle leggi basilari della Natura.

7) *La Terra, il più denso dei corpi del sistema solare.* — Astronomi eminenti, come Armellini, hanno messo in particolare rilievo il fatto che *nel sistema solare della Teoria classica il corpo più denso è la Terra.* Inoltre si osserva che i corpi celesti (pianeti e Sole) presentano una successione decrescente delle loro densità (con lievi eccezioni) in corrispondenza con la successione crescente delle loro distanze *dalla Terra* : al crescere della distanza dalla Terra decresce la densità dell'astro. È

una « strana combinazione », come si esprimerebbe Eddington. *La Terra classica, pur essendo un pianeta qualunque, ha tuttavia una situazione privilegiata.* Ma tale fatto, nella concezione classica del mondo, si presenta del tutto casuale. Nel nuovo concetto, invece, lo stesso fatto *consegue* dalla stessa struttura del mondo, in base alla quale, prima ancora di risultare dai calcoli, fondati sulla legge di Newton, si sarebbe potuto prevedere. La successione, nel nuovo concetto, s'inverte. La Terra è *meno densa* di *tutti i corpi celesti.* Nel cap. VI abbiamo spiegato come i corpi celesti abbiano uguale massa nei due sistemi, con densità molto basse nel sistema classico e densità altissime nel nuovo. La Terra, costituendo la zona periferica dell'Universo, è molto meno densa dei corpi celesti, che trovansi in prossimità delle sorgenti del campo, dove le curvature spaziali sono molto sensibili, l'energia è assai concentrata e le masse degli astri sono molto dense. Nel nuovo concetto il fatto sopra rilevato non ha più carattere accidentale, non è più dovuto al caso, ma, soddisfacendo al principio di ragion sufficiente, si spiega razionalmente.

8) *La Terra, pianeta favorito per la sua abitabilità.* — Armellini, fra gli altri, mette in rilievo una circostanza ancora, che pone la Terra in una posizione di privilegio. « La Terra, egli scrive, è uno dei rari globi atto a mantenere in vita un essere che *ha coscienza della propria esistenza*; nonostante la sua relativa piccolezza, può ben dirsi un globo *particolarmente favorito*». Ma a che tale privilegio, se nel sistema classico il pianeta Terra non ha titoli particolari che lo debbano far spiccare fra gli altri? La domanda non ha ragione di essere posta nel sistema endosferico, dove la Terra non è un «pianeta», ma la periferia del mondo. La sua distinzione dai pianeti è implicita nella stessa struttura dell'Universo.

9) *Le stagioni e le cause delle differenze di temperatura.* — Le differenze di temperatura, nel corso delle stagioni, sono *essenzialmente* attribuite, nel concetto classico, alla nota 1ª legge del coseno di Lambert. La validità di questa legge è indubbia, ma non appare sufficiente a spiegare il fenomeno delle differenze di temperatura di cui sopra. Riduciamo di scala di circa un miliardo il diametro del Sole, quello della Terra e la distanza Terra-Sole : otterremo per il Sole un diametro di m. 1,4, per la Terra m. 0,015 e per la distanza Terra-Sole m. 150. Dunque, immaginando una sfera di m. 1,4 di diametro, irradiante una grande quantità di energia calorica, posta a una distanza di 150 metri da una sferetta di circa un centimetro e mezzo di diametro, ci dobbiamo forse attendere che questa sferetta raggiunga elevate temperature nella parte anteriore

(e posteriore) e temperature molto al di sotto dello zero nelle zone polari, ovvero un riscaldamento pressochè uniforme di tutta la sferetta? Una breve riflessione ci induce a pensare che si verificherebbe proprio l'uniforme riscaldamento in contrasto con l'altra eventualità, che, però, è proprio quella che si verificherebbe ammettendo il sistema copernicano. Nel nuovo concetto, alla causa sempre valida della legge del coseno, se ne aggiunge un'altra, forse fondamentale. Consideriamo il Sole, nel momento in cui si trova nel punto vernale; possiamo considerare uguale la sua distanza e dall'equatore terrestre e dai poli (la differenza di 6370 chilometri è trascurabile di fronte alla distanza di 149.600.000 chilometri). L'intensità con cui la radiazione solare raggiunge sia l'equatore che i poli, è, quindi, nel sistema classico, identica. Non altrettanto accade nel nuovo concetto. Sappiamo che *numericamente* le distanze e le differenze di distanze, sopra considerate, nei due sistemi sono identiche; nel mondo endosferico, però, i chilometri calcolati non sono euclidei, nel senso spiegato nel cap. IV. Ciò significa che, come può osservarsi nelle Tav. XI e XVI, quando il Sole si trova, per es., allo zenit dell'equatore, la sua radiazione raggiunge l'equatore *perpendicolarmente* e i poli *tangenzialmente* (e fin qui nulla di diverso succede nel sistema classico); ma ora avvertiremo una importante differenza: la radiazione endosferica che raggiunge l'equatore ha una lunghezza (come si vede nel disegno) pari a circa $\frac{2}{3}$ della lunghezza della radiazione che raggiunge il polo, pur misurando le due radiazioni lo *stesso* numero di chilometri *non* euclidei. Ciò vuol dire che l'energia solare che raggiunge il polo è più rarefatta (più debole quindi) di quella che raggiunge l'equatore. D'altra parte basta considerare l'andamento delle linee di forza di un campo e le leggi che lo governano per concludere nello stesso modo: la radiazione che raggiunge l'equatore è più intensa (l'energia è meno rarefatta) di quella che raggiunge il polo. Ciò non accade nel mondo classico, dove le radiazioni solari, che raggiungono sia l'equatore che i poli, si ammettono *tutte ugualmente intense*. Abbiamo dato dunque la ragione forse più importante (oltre a quella, certamente valida, ma, da sola, insufficiente, della legge del coseno), per cui si hanno le differenze di temperatura, nelle varie zone della superficie terrestre, nel corso delle stagioni. Forse ci troviamo di fronte ad una spiegazione invero esauriente del fenomeno, che *solo* il concetto del campo universale può fornire.

10) *Luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna.* — Si constata che la luminosità del cielo notturno, senza nubi e senza Luna,

è dovuta solo in minima parte alla luce irradiata dalle stelle: tale luminosità risulta dai calcoli 5 volte maggiore di quella puramente stellare. Sono state formulate varie teorie: una di esse attribuisce tale luminosità alla *luce zodiacale*, la quale, a sua volta, sarebbe dovuta a sciami di particelle molto lontane riflettenti luce solare (teoria *planetaria*). Ignota è l'origine di simili nubi. La Teoria classica del mondo fornisce pertanto, per il fenomeno anzidetto, una spiegazione insoddisfacente. Nel cap. VIII abbiamo spiegato il fenomeno del giorno e della notte nel mondo endosferico. Le radiazioni solari, che non sono assorbite dalla superficie terrestre, girano nell'alto degli spazi verso l'altra sorgente del campo, il Centro Stellare. *Anche dalla parte della notte*, quindi, *sono presenti le radiazioni solari, nelle profondità del cielo notturno*: il fenomeno della luminosità notturna in assenza di nubi e di Luna si presenta molto naturale, senza alcuna necessità di formulare nuove ipotesi più o meno attendibili. Tale luminosità, se non fosse stata direttamente rilevata, si sarebbe potuta prevedere, *prima della sua effettiva constatazione*, in base alla Teoria del campo universale. Più volte, infatti, nella storia della scienza una scoperta effettiva si è verificata in base alla sua previsione teorica: vale la pena ricordare la scoperta, effettuata con il telescopio di Galle, del *pianeta Nettuno*, prevista, col calcolo, da Leverrier, in base alla legge di Newton; la scoperta delle *onde elettromagnetiche* o onde hertziane, fatta prima teoricamente da Maxwell, che trovò l'equazione di queste onde come conseguenza logica delle equazioni dell'elettromagnetismo; la scoperta di *nuovi elementi chimici*, effettuata prima da Mendelejeff, in via teorica, con il suo «sistema periodico»; la scoperta dell'*elettrone positivo*, effettuata prima teoricamente da Dirac, con le sue famose equazioni dell'elettrone, verificata nella realtà da Anderson, Blacket e Occhialini; la scoperta della *diffrazione dei raggi catodici*, fatta prima teoricamente in base alla meccanica ondulatoria e poi riscontrata effettivamente nella realtà con la celebre esperienza di Davison e Germer.

Orbene, sia il fenomeno della luminosità notturna sia altri fenomeni, di cui abbiamo parlato, come, per es., la simmetrica caduta sulla superficie terrestre dei raggi cosmici, il rispetto della legge della conservazione della energia per quanto riguarda le radiazioni emesse dal Sole, la particolare posizione della Terra per quanto concerne la sua densità, ecc., discendono dalla Teoria del campo e, pertanto, prima della loro effettiva constatazione, in base alla nostra Teoria si sarebbero potuti prevedere.

11) *Analogia fra l'atomo e il sistema planetario.* — Planck scrive che nell'analogia fra le leggi che regolano il moto degli elettroni attorno al nucleo e quelle che regolano il moto dei pianeti attorno al Sole bisogna rilevare una « singolare differenza »: gli elettroni possono circolare soltanto su orbite ben determinate che differiscono l'una dall'altra in modo discreto, mentre nel caso dei pianeti nessun'orbita sembra preferita rispetto ad un'altra. Più succintamente possiamo dire: Planck rileva la singolare differenza fra spazio astronomico e spazio atomico, fra la natura *euclidea* del primo e la natura *non euclidea* del secondo. Ora siffatta *singolare differenza* tra spazio astronomico endosferico e spazio atomico scompare, nel senso che nessuno dei due spazi è euclideo. Le orbite dei pianeti, nel sistema cosmocentrico, sono traiettorie solcate su superficie equipotenziali del campo universale: tali superficie sono caratterizzate da condizioni spaziali che *differiscono* dalle condizioni spaziali delle zone vicine. Nella concezione classica, pur potendosi parlare anche in essa di campo, tuttavia, data l'estrema rarefazione del mezzo, che famose autorità scientifiche dicono « vuoto », « deserto », si ha l'uniformità, la non-differenziazione tipica dello spazio euclideo, ciò che fece rilevare a Planck la predetta «singolare differenza» fra spazio astronomico (euclideo) e spazio atomico. Nella nuova concezione del mondo cade il rilievo fatto da Planck.

12) *Il magnetismo terrestre e la sua origine.* — «Non si sa bene finora come spiegare l'origine di quel campo magnetico, che avvolge la superficie terrestre », scrive Masani. Sono state diverse le ipotesi che sono risultate inaccettabili. I fisici si sono orientati verso la Teoria generale del magnetismo, che collega questo fenomeno al movimento di cariche elettriche; ma resta tuttavia la grave difficoltà di cercare la causa di tali correnti elettriche. Delle due ipotesi formulate a tal riguardo, quella *termoelettrica* e quella *della dinamo*, è rimasta in piedi solo la seconda: la causa delle correnti elettriche viene connessa con i moti convettivi di cui il nucleo liquido terrestre dovrebbe essere sede; un eventuale debolissimo campo magnetico preesistente potrebbe essere amplificato da tali correnti, proprio come accade in una dinamo qualsiasi. Ma cosa sappiamo di certo attorno all'interno della Terra ? Kahn avverte che « tutto quanto diciamo circa l'interno della Terra » è « *pura congettura* »; si naviga nel buio. Il nuovo concetto del mondo, invece, fornisce la fonte naturale di dette correnti elettriche nella struttura del campo universale: non occorrono nuove ipotesi, non si debbono fare altre con-

getture. Il fenomeno del magnetismo terrestre, legato al movimento di cariche elettriche, appare soddisfacentemente spiegato dalla Teoria Endosferica del campo.

Ancora un punto, sul quale vogliamo soffermarci è costituito dai:

13) *Voli vertiginosi di astri colossali con densità quasi nulla.* — La Teoria classica comporta fatti sorprendenti, come, ad es., il rapido volo (3 km/sec.) di Antares, che ha un diametro di più di mezzo miliardo di chilometri ed una densità 2000 volte minore di quella dell'aria, e come le velocità di decine di migliaia di km/sec. di milioni di «Soli», che hanno diametri migliaia di volte superiori alla distanza Terra-Sole e densità dell'ordine di 10^{-21} (20 corpuscoli, atomi od elettroni liberi, per ogni centimetro cubo). Questi voli di corpi giganteschi, aventi densità vicinissime a zero e velocità non lontane da quella della luce, costituiscono fenomeni, in cui si stenta a credere. Nella nuova Teoria si hanno, invece, densità elevatissime, volumi ridotti, velocità riferite a unità di lunghezza locali (vedasi cap. V): fenomeni questi sensibilmente più verosimili.

Agli anzidetti punti deboli del sistema classico, cui la nuova Teoria può apportare una spiegazione razionale, se ne aggiunge un altro, contenuto, come subito vedremo, nella Teoria di Wegener:

14) *La deriva dei continenti.* — Sappiamo che la Terra è in continua evoluzione: ciò è provato non solo dalle eruzioni vulcaniche, inondazioni, frane, ecc., ma da mutamenti meno appariscenti, che, tuttavia, nel corso di milioni di anni, determinano nella struttura terrestre modificazioni imponenti. Certi organismi, quali piante ed animali, di specie e famiglie assai simili, si trovano localizzati in parti della superficie terrestre molto lontane fra loro: siffatte distribuzioni e migrazioni costituiscono una prova che i continenti attuali, in epoca remota, dovevano in qualche modo costituire un unico blocco. Nel secolo scorso si pensò che la separazione attuale dei continenti, un tempo uniti, fosse stata causata dallo sprofondamento, e conseguente scomparsa, di continenti leggendari, come Atlantide, Lemuria ed altri. Una teoria più valida sorse nel 1922, formulata da Wegener. Questi prese lo spunto dalla profonda corrispondenza della forma delle coste tra l'America Meridionale e l'Africa Occidentale: immaginando infatti di accostare i due continenti, troviamo che le loro coste possono combaciare come i contorni di un oggetto spezzato; altre corrispondenze si osservano fra la costa occidentale dell'India e quella dell'Africa Orientale, fra le coste

dell'Australia, dell'Antartide e dell'Asia Meridionale, ecc. I vari continenti possono pensarsi disposti uno accanto all'altro come i pezzi di un mosaico, uniti ad incastro. Wegener sostiene che i continenti derivano effettivamente da un unico continente primordiale « Pangea », che non era però un unico blocco di terre emerse, ma una massa continentale unica (con mari interni, anche vastissimi come la Tetide, di cui il Mediterraneo sarebbe un avanzo). Questo unico continente, circondato da un unico oceano « Pantalassa », si sarebbe scisso in vari pezzi, che andarono alla « deriva », fino a trovarsi nelle posizioni attuali.

Un altro fatto fu oggetto di riflessione da parte di Wegener. Nel 1855 una spedizione di scienziati inglesi, che stava effettuando misure della forza di gravità ai piedi dell'Himalaia, fece un'importante scoperta : ai piedi delle grandi catene montuose la forza di gravità non si comportava secondo quanto si prevedeva ; le misure effettuate, sia in prossimità di grandi masse montuose, sia sugli oceani, provarono che essa si manteneva, praticamente, pressoché uniforme.

Lo strato esterno della Terra si immagina fondamentalmente diviso in due parti: il *Sial* (silicio e alluminio) e il *Sima* (silicio e magnesio). Il Sial, più leggero e più superficiale, è allo stato solido e «galleggia» nel Sima, più pesante e più intenso, supposto in uno stato particolare di massa plastica o semifluida. Le masse continentali «galleggiando» si spostano : in ciò consiste la « deriva », concetto basilare nella Teoria di Wegener. «Le cause del movimento di deriva rappresentano un punto debole della Teoria : si spiega infatti facilmente il movimento verso l'equatore, come dovuto alla forza centrifuga, ma del moto verso occidente non si può facilmente render ragione », scrive Maurizio Girelli, dai cui scritti abbiamo tratto le anzidette notizie sulla Teoria di Wegener. Sono state formulate inoltre varie teorie per spiegare l'uniformità della forza di gravità, fra cui quella di Airy (1855) fondata su certe ipotesi circa il comportamento del Sial e del Sima, su cui non ci soffermiamo.

La Teoria endosferica può apportare un contributo alla spiegazione della uniformità della forza di gravità mediante il suo concetto della *forza di repulsione solare* ; un altro contributo lo offre per spiegare lo spezzettamento dei continenti, senza togliere validità alle idee di Wegener, che, con una teoria di ampio respiro, ha portato luce a molti fenomeni geologici. Uno dei fenomeni del processo di evoluzione della Terra cava è il suo allargamento : la superficie terrestre, nel corso di milioni di anni, si espande in virtù della forza di espansione (o repulsione) universale, con conseguenti fratture e spezzettamenti dei conti-

nenti. Alla Teoria di Wegener, quindi, si affianca un'altra ragione, forse fondamentale, del fenomeno in esame.

Una spiegazione più attendibile di quella classica, infine, potrebbero probabilmente trovare nel nuovo concetto altri fenomeni, come quello delle Aurore Boreali, della riflessione delle onde corte da parte di quella specie di specchio concavo, che è lo «strato di Kennelly-Heaviside», ecc., su cui, tuttavia, per ora, non m'indugio.

Le estrapolazioni. — Nel cap. XIII della Parte I abbiamo rilevato numerose estrapolazioni fatte dagli astronomi, consistenti nell'applicazione allo spazio cosmico di varie importanti leggi fisiche verificate nei laboratori. Tali estrapolazioni non sono ammesse, tuttavia, senza serie riserve da parte di eminenti scienziati. Le principali leggi estrapolate sono: la legge della propagazione rettilinea della luce, la legge dell'attrazione verificata da Cavendish, la legge del quadrato delle distanze, la legge di Stefan e Boltzmann, la relazione esistente fra luminosità e tipo spettrale, l'effetto Doppler.

Attorno alla legge della propagazione «rettilinea della luce» abbiamo detto abbastanza: nella nuova concezione del mondo la luce percorre le *geodetiche* del nuovo spazio non euclideo, pur rimanendo rispettati i dati d'osservazione. Quanto alle altre leggi, relazioni ed effetti, con le dovute riserve, possiamo applicarli allo spazio endosferico non euclideo; ciò significa dare a tali estrapolazioni una diversa interpretazione. Nella nuova Teoria, l'effetto Doppler, la cui interpretazione, per quanto riguarda la velocità degli astri, ha lasciato perplesso più di uno scienziato, riceve una diversa interpretazione non appena si consideri che le velocità sono riferite a unità di lunghezza locali. Su questi punti tuttavia non mi soffermo ulteriormente. Ho voluto sottolineare il fatto che la struttura del mondo classico, oltre ai punti deboli prima esaminati, poggia sull'ammissione di estrapolazioni, la cui legittimità è stata posta in dubbio da più di una autorità scientifica, e ciò costituisce un altro punto debole della Teoria classica dell'Universo. Tale punto debole, dato che abbiamo anche noi estrapolato, sussiste nel nuovo concetto? Non posso rispondere in modo netto: dirò solo che una interpretazione più adeguata, data la natura del nuovo spazio, di siffatte leggi e relazioni applicate allo spazio cosmico, potrebbe portare a soluzioni più verosimili, in specie per quanto riguarda le velocità degli astri più remoti, ecc. Non ometterò di ricordare che anche noi abbiamo fatto due notevoli estrapolazioni: la prima è quella di aver concepito, in base alle nostre esperienze attorno ai campi elettrici e ai campi magnetici,

il *campo universale*, e la seconda è quella di aver applicato alla Terra cava la legge per cui all'interno di una sfera cava omogenea il campo gravitazionale è nullo. Queste estrapolazioni sono soggette alle stesse riserve che pesano sulle estrapolazioni classiche prima rilevate.

Dei due Universi, quale, dunque, è il vero? Premettiamo un criterio universalmente accettato: una nuova teoria può essere legittimamente proposta, se soddisfa alle seguenti due condizioni:

1) Spiega tutti i fatti che la precedente teoria soddisfacentemente spiegava.

2) Dà una spiegazione razionale di almeno un fatto che nella precedente teoria si presentava in maniera puramente accidentale.

La nuova Teoria soddisfa sia alla prima che alla seconda condizione: oltre a spiegare in maniera ugualmente soddisfacente tutti i fatti spiegati dalla Teoria classica, dà una spiegazione razionale a diversi fatti che nella Teoria esosferica apparivano o dovuti al caso (simmetrica caduta sulla Terra dei raggi cosmici; densità della Terra superiore a quella degli altri corpi del sistema solare), o in contrasto con leggi fondamentali della natura, come il principio della conservazione dell'energia (dispersione della quasi totalità dell'energia irradiata dal Sole) o spiegati insoddisfacentemente (le cause delle differenze di temperatura nel corso delle stagioni; la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna; l'origine del magnetismo terrestre).

L'evoluzione delle teorie scientifiche, inoltre, implica che ogni nuova teoria ammetta come caso particolare la precedente; ogni nuova teoria non distrugge la vecchia, ma ne determina i limiti di validità, limiti che la nuova teoria tende a superare. Vedremo nel cap. XIV che il concetto endosferico dell'Universo ammette come caso particolare la Teoria Generale della Relatività; che questa ammette (e lo abbiamo già visto) come caso particolare la Relatività Ristretta; e che questa (come pure abbiamo già visto) ammette come caso particolare la Teoria di Newton.

Einstein, a proposito dell'identità delle due masse, inerte e pesante, che si presentava accidentale dal punto di vista della fisica classica e che, invece, dal punto di vista della Teoria della Relatività Generale è fondamentale per una più profonda comprensione della natura, così si esprime (30, *b*; 46): « Un romanzo giallo è giudicato di qualità inferiore se spiega fatti strani come accidenti; lo troviamo assai più soddisfacente se non si discosta da una linea razionale ».

Nella Teoria endosferica, fatti come l'origine del magnetismo terrestre, la simmetrica caduta sulla Terra dei raggi cosmici, la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna, la densità della Terra inferiore a quella degli altri corpi del sistema solare non hanno bisogno di particolari ipotesi per essere spiegati ; nè si presentano come fenomeni indipendenti, senza alcun legame fra di loro, ma *discendono* dalla stessa Teoria del campo. Come abbiamo già detto, può tornare ancora comodo, per determinati calcoli e particolari esperimenti, riferirsi allo spazio uniforme del concetto classico, ma non si può spingere il pragmatismo fino al punto di ritenere più vero ciò che è più comodo. Una teoria che comprenda nel suo campo razionale una maggior dovizia di fenomeni, anche se meno comoda per altri rispetti, da un punto di vista più elevato deve ritenersi più vera. A proposito delle sue Teorie, scrive Einstein (30, *b* ; 243) : « Riconosco che il mio apparato matematico è più complicato di quello classico, ma le mie supposizioni fisiche sono più semplici e più naturali ».

Il nuovo concetto parte da supposizioni, se non sempre più semplici di quelle del concetto classico, certamente più naturali, come l'ipotesi di uno spazio non uniforme, sede di moti non rigidi. Bridgman scrive (16 ; 183, 185) : « A me sembra indubbio, per quanto riguarda i fatti sperimentali, che l'universo, ad ogni livello definito, tende in media a diventare sempre più complicato, e che la regione dell'apparente semplicità si riduce continuamente... Stabilito che la natura non ha particolari predisposizioni verso le relazioni semplici, la convinzione che ve ne siano può risultare, dal punto di vista individuale, tanto un ostacolo quanto un aiuto ». L'armonica struttura della natura non è da attribuirsi alla sua semplicità, ma alle sue leggi. Il nuovo concetto del mondo è, forse, meno semplice del concetto classico, ma, per essere legato a leggi più comprensive, presenta, in confronto al concetto tradizionale, una armonia maggiore. Sulla verità di una Teoria vorremo, tuttavia, indugiarci con considerazioni, che investono aspetti del pensiero non solo scientifico, ma anche filosofico. È quanto ci accingiamo a fare nel prossimo capitolo.

CAPITOLO XIII

In che senso una teoria è vera. Teoria ed esperienza.

Verità ed errore, il criterio di corrispondenza e sua debolezza – Le pseudo-proposizioni – Verificabilità e inverificabilità di principio – Filosofia e scienza – L'operatività, condizione di validità di una proposizione – Validità (verità) delle Teorie einsteiniane e della Teoria Endosferica del campo – Bridgman e il viaggio sulla Luna – La scienza si fonda sui fatti o sulla teoria? – La scienza presso i Greci – Platone e Aristotele – Copernico e Newton – Galilei e Cremonini – Eddington e la scienza astronomica – Lo sviluppo della scienza e il processo dialettico fra teoria ed esperienza.

Se davvero ci fosse una persona risoluta a scartar la teoria e ad ammetter solo i precisi fatti osservati, per quella persona tutti i libri di Astronomia sarebbero privi di significato: non vi sono fatti di pura osservaziane sul conto dei corpi celesti.

EDDINGTON

Il problema trattato in questo libro ha carattere essenzialmente scientifico; tuttavia il suo sfondo filosofico si rivela non appena siamo indotti a domandarci, a proposito della verità di una teoria, quale sia il criterio distintivo fra verità ed errore, in base a che cosa un discorso può essere considerato ragionevolmente accettabile o ragionevolmente rifiutabile. Per lunghi secoli ebbe molto credito la formula tomista: « veritas est adaequatio rei et intellectus ». In altri termini verità era la piena corrispondenza logico-ontologica tra il discorso del filosofo e la realtà: si dichiara che le « cose » stanno *così* e non altrimenti, perchè si pensa che *così* debbano essere necessariamente, e inversamente si asserisce che ciò che si pensa — il proprio sistema filosofico — è vero, perchè le « cose » starebbero per l'appunto *così*.

Una concezione filosofica, quindi, è vera se l'anzidetto criterio risulta soddisfatto. Ma donde potrà una concezione filosofica trarre le

prove della sua perfetta adeguazione con le cose *così come sono in se stesse?* Da un procedimento rigorosamente dimostrativo, da una serrata concatenazione di argomenti? Non sembra; perchè, pur ammettendo che tale processo dimostrativo risulti inattaccabile, bisognerebbe aver *già* dimostrato che esso sia fornito di valore oggettivo assoluto, che tragga, cioè, la propria giustificazione dalla corrispondenza con la realtà. Ma questo è proprio ciò che bisogna ancora dimostrare. Siamo di fronte ad una petizione di principio o circolo vizioso, che consiste nel provare una proposizione (*A*) mediante un'altra (*B*), la quale non può essere a sua volta provata che mediante (*A*). Pertanto, sulla base del criterio di corrispondenza, il pensiero dogmatico, implicito nella convinzione che una concezione filosofica possa esprimere la verità assoluta, non si regge più. Il filosofo critico considera invece la propria teoria come una *proposta di interpretazione*, come una prospettiva entro cui inquadrare il mondo, senza presumere di essere in possesso del vero assoluto. Ciò non toglie che tale teoria possa essere considerata più *valida* di altre, per le esigenze di coerenza e di economia logica cui soddisfa e per la fecondità che dimostra come strumento di lavoro. Rinunciare alla fondazione metafisica non significa cadere nell'indifferentismo scettico, metter tutto sullo stesso piano, smarrire il senso dei valori.

I neopositivisti del circolo di Vienna, accanto ai concetti antitetici di verità e di falsità, introducono il «non-senso». Secondo Carnap esistono due tipi di pseudo-proposizioni: le une sono quelle in cui figurano parole sfornite di senso (per es. abracadabra); le altre sono quelle che — formate di parole le quali isolatamente considerate hanno senso — vengono costruite senza rispettare le regole della *sintassi logica* di quel dato linguaggio, senza, cioè, rispettare le regole che stabiliscono come si devono organizzare le frasi con le varie specie di parole e che determinino quindi la struttura formale di un dato tipo di discorso (ad es.: Cesare è un numero primo, ecc.). La metafisica, secondo il neopositivismo, consta appunto di proposizioni analoghe.

Soffermiamoci sulle pseudo-proposizioni del primo tipo, quelle cioè di cui fanno parte parole che non hanno senso. Che vuol dire non aver senso? Vuol dire che esse, *per principio*, non sono suscettibili di verifica, che cioè non si può indicare nessuna concreta esperienza a cui esse si riferiscano e che sia capace di decidere della loro verità o falsità. Quando noi enunciamo qualcosa, dobbiamo sapere che cosa deve succedere perchè lo si possa considerare vero o falso. Sapere che cosa deve succedere significa avere un metodo di verifica; se non è possibile nessuna verifica, si cade nel discorso vago, allusivo, poetico o metafisico... Asserire

che il fosforo bianco fonde a 34 gradi costituisce un'affermazione che ha senso (anche se è errata, perchè l'esperienza mostra che esso fonde a 44 gradi); asserire invece, con Spinoza, che la «sostanza» *è una e infinita* costituisce un'affermazione priva di senso, perchè, mentre nel primo caso esiste un metodo per compiere la verifica, nel secondo non c'è e non ci può essere. Da questo punto di vista potremmo dire che l'assenza di significato consiste in una *inverificabilità di principio*, la verità in una *verificazione positiva*, la falsità in una *verificazione negativa*. Un enunciato del tipo « la Terra è abitata », è suscettibile di verificazione empirica; l'enunciato « il pianeta Marte è abitato » non può essere verificato oggi e potrebbe non esserlo mai, ma è verificabile, cioè non è *per principio* inverificabile, perchè esso contiene implicitamente l'indicazione delle esperienze sensibili, ripetibili e intersoggettive che lo verificherebbero. Non altrettanto può dirsi per enunciati del tipo «l'anima è immortale».

Sulla base della discriminazione tra proposizioni fornite di senso e proposizioni prive di senso si è cercato di stabilire la differenza fra compito scientifico e compito filosofico. *La scienza*, scrive Schlick, *cerca di di dare ai problemi delle risposte esatte ; la filosofia cerca di porre in modo esatto i problemi.*

Fonte di proposizioni strutturalmente inaccettabili è la tendenza a trasporre un termine (un concetto) da un contesto all'altro con la relativa convinzione che tale concetto, valido nel contesto *A*, serbi la propria validità nel contesto *B*. Il concetto di causa, ad es., usato nel campo delle discipline storico-sociali, non può in nessun modo essere assimilato alla causalità di tipo logico o fisico o psicologico valida nei rispettivi tipi di discorso. L'esistenza dell'elettrone o della particella subatomica in genere, non è l'esistenza che nel linguaggio ordinario si attribuisce alla sedia o alla mela o al sasso.

Il criterio di verifica, inteso in senso ristretto e restrittivo nel primo periodo nel neopositivismo del circolo di Vienna, è stato interpretato, più tardi, in senso più libero e più liberale. Una proposizione ha diritto ad essere riconosciuta fornita di senso e altresì vera (valida), qualora ne sia stata verificata l'operatività, l'efficacia funzionale, la capacità d'inserirsi in un ciclo di attività e di guidarlo con esito positivo ai suoi fini. Su questa base trovano piena giustificazione le « ipotesi di lavoro », di cui si vale largamente la ricerca scientifica : la loro verità o validità è direttamente proporzionale alla loro capacità di riuscita sul piano pratico, alla loro capacità di orientare l'azione verso il raggiungimento di determinati scopi. C. S. Peirce, uno degli iniziatori del movimento prag-

matista, suggeriva di cercare il significato delle nostre idee, dei nostri enunciati, nelle conseguenze o effetti pratici, da essi promossi.

La verità scientifica poggia su un criterio di validità. La Teoria elettromagnetica della luce è più vera (più valida) di quelle precedenti (la corpuscolare e l'elastica), perchè non contraddice queste ultime, ma ne offre una interpretazione fisica più comprensibile, eliminando le difficoltà relative alla propagazione di onde *trasversali* in un mezzo fluido come si pensa sia l'etere, e presenta inoltre il grande vantaggio di unificare due vasti rami della fisica, facendo rientrare l'ottica nel dominio delle leggi dell'elettromagnetismo. Il valore di verità delle equazioni di Einstein risiede nella loro concreta applicazione (verificazione) nel campo sperimentale. Le gigantesche macchine acceleratrici di particelle (ciclotroni, sincrotroni, betatroni) funzionano solo se progettate secondo le leggi della Relatività Ristretta. Clamorose verifiche ha avuto la relazione einsteiniana : $E = mc^2$. La spiegazione della rotazione del perielio di Mercurio, la deflessione dei raggi luminosi e lo spostamento verso il rosso dei raggi spettrali della luce conferiscono forza di verità alla Teoria della Relatività Generale.

La Teoria endosferica del campo è più vera di quella classica ? Esistono, nel campo sperimentale, fatti che le conferiscano un carattere di validità maggiore di quella goduta dalla Teoria copernicana ? Abbiamo visto come tutti i fatti di osservazione e la stessa meccanica newtoniana trovano, rispettivamente, una spiegazione e una applicazione ugualmente soddisfacente sia nella Teoria classica che in quella endosferica. Un fatto, tuttavia, che non trova spiegazione nella Teoria classica, mentre ne riceve una immediata nella nuova, è la « strana combinazione » della simmetrica caduta dei raggi cosmici sulla Terra; altrettanto può dirsi di altri fatti di cui al capitolo precedente. Un *experimentum crucis*, come diceva Bacone, la *produzione* di un fatto, che possa essere spiegato solo da una delle due ipotesi, potrà eventualmente presentarsi, ma, data l'equivalenza per tanti rispetti delle due Teorie, non è agevole suggerirne uno.

Come vedremo meglio nel cap. XV, nemmeno il più cospicuo esperimento, effettuato finora in campo cosmico, il lancio del Lunik III attorno alla Luna, può discriminare fra i due concetti del mondo. È interessante rilevare, in ordine a tali esperimenti, quanto scrive Percy W. Bridgman (16 ; 36) : « ... con la sostituzione dello spazio ottico allo spazio tattile su scala astronomica, consideriamo sempre coltivabile dall'umanità il sogno di un viaggio sulla Luna ». Bridgman non ritiene si possa estrapolare senza riserve allo spazio astronomico la coincidenza dello spazio tattile con lo spazio ottico, verificata, entro i limiti degli

errori d'osservazione, nello spazio ordinario; tale coincidenza risulta dalle proprietà che si suppone abbiano i raggi di luce, così come « dalla supposta equivalenza fra spazio ottico e spazio tattile consegue che il cammino di un fascio luminoso è rettilineo, essendo la linea retta determinata da operazioni compiute con i regoli » (16; 74). Notiamo che Bridgman si riferisce ai regoli *rigidi* e quindi allo spazio *rigido*. Suscettibile solo di moti rigidi, il regolo rigido può fornirci una « *linea retta* » *tattile*, la cui coincidenza su scala astronomica con la « *linea retta* » *ottica* appare come una condizione necessaria perchè un viaggio sulla Luna abbia successo. Il lancio del Lunik ha provato che la « linea retta » tattile e la « linea retta » ottica effettivamente coincidono anche su scala astronomica. Tale coincidenza prova che lo spazio è euclideo? No, perchè anche nello spazio *non euclideo* si ha uguale coincidenza: le traiettorie curve o geodetiche percorse dalla luce coincidono con le traiettorie curve o geodetiche percorse dai regoli *non rigidi in moto non rigido* nel campo universale del mondo endosferico.

Mal si sorregge, come Bridgman sospetta, l'ipotesi della propagazione rettilinea della luce: ora una propagazione non rettilinea della luce in uno spazio euclideo giustifica le perplessità di Bridgman circa il sogno dell'umanità di raggiungere la Luna. Se lo spazio fosse euclideo e la propagazione della luce non fosse rettilinea, il raggiungimento della Luna sarebbe rimasto effettivamente un sogno! Nel nuovo concetto la luce ha ancora una propagazione rettilinea in senso *non euclideo*; la luce, cioè, percorre traiettorie rettilinee o geodetiche *non euclidee* per la diversa natura dello spazio cosmico, che noi concepiamo come un campo. Siamo con Bridgman, con Eddington ed altri nel rifiutare la propagazione rettilinea, *nel senso euclideo*, della luce; ma noi andiamo oltre: concepiamo una struttura spaziale notevolmente diversa sia da quella classica che da quella relativistica (*praticamente* non dissimile dalla classica, come abbiamo più volte rilevato).

Abbiamo precisato quindi i limiti e la portata, come esperimento di prova, per quanto concerne il nostro argomento, del lancio del Lunik. Pertanto un *esperimento cruciale*, un fatto prodotto dall'uomo, capace di discriminare fra le due teorie del mondo, non è stato ancora effettuato, nè, ripetiamo, è agevole individuarne uno. A conferire maggiore forza di verità (validità) alla nuova concezione del mondo, in confronto con la Teoria copernicana, stanno, per ora, essenzialmente i fatti che abbiamo esposti nel capitolo precedente.

Occorre aggiungere che non si può ovviamente parlare di pura esigenza pratica o di pura esigenza logica: la validità di una teoria dipende, come s'è detto, sia da esigenze di coerenza e di economia logica

sia dalla fecondità, che dimostra, come strumento di lavoro. È indubbio che operare su uno spazio euclideo con lo strumento geometrico di Euclide è assai più comodo che operare su uno spazio non euclideo applicando ad esso uno strumento geometrico non euclideo, ad esso idoneo, ma assai più complesso. Asserire tuttavia che il sistema classico è vero, perchè uno strumento matematico più agevole di altri, come quello della geometria di Euclide, ad esso applicato, ha dato la possibilità di trarne vantaggi e risultati pratici notevolissimi, è puro pragmatismo da rifiutare. Se un sistema diverso, sia pure con uno strumento matematico meno agevole, oltre a soddisfare le esigenze pratiche, coglie verità più riposte in campo logico o filosofico, è da considerarsi più vero del primo. Data l'equivalenza dei due spazi si può continuare, per ragioni di praticità, ad operare, per i calcoli e per le previsioni di fenomeni, ecc., sul vecchio spazio, concepito però solo come una immagine astratta dello spazio reale del sistema cosmocentrico. Nel cap. XV torneremo sull'argomento.

Non sarà fuor di luogo indugiarci ancora sulla circostanza che una stessa classe di fatti possa essere spiegata da Teorie diverse. La Teoria cosmocentrica e quella copernicana spiegano ugualmente bene una vastissima classe di fatti. La Teoria di Newton e quella di Einstein hanno, entrambe, un alto grado di validità, pur essendo essenzialmente diverse: alle due astrazioni di Newton (spazio uniforme e campo statico delle forze) Einstein sostituisce una legge unica (la legge di inerzia generalizzata) che le fonde e le compendia entrambe. Altro esempio cospicuo lo offrono le Teorie della luce di Fresnel e di Maxwell : entrambe soddisfacevano allo scopo precipuo di prevedere fenomeni ottici.

Poniamoci ora la seguente domanda : la scienza si fonda sui fatti o sulla teoria ? Nel mondo greco predominava la teoria. Il fine delle scienza antica non era la conquista e il controllo della natura, ma la soddisfazione di esigenze essenzialmente speculative : la scienza greca è priva di quella sintesi fra conoscenza pura e applicazione pratica, fra matematica e metodo sperimentale, che costituisce la forza della scienza moderna. La teoria delle idee di Platone non considerava l'esperimento come un mezzo per conseguire lo scopo desiderato. Quando la concezione platonica della divina intelligenza degli astri, rivelata dalla conformità alle leggi e dall'assoluta regolarità dei loro movimenti, venne accettata da Aristotele, che la consolidò fornendole una più ampia base fisica, il destino della scienza greca, come rileva Sambursky (80 ; 70), fu segnato e la divisione fra il Cielo e la Terra divenne parte integrante della fisica antica e del cosmo greco. L'Universo aristotelico si divide

in due regioni : *regione celeste* dalla Luna in su e *regione terrena* o sublunare. La regione celeste è *perfetta* e *incorruttibile*: sua materia è *l'etere*, detto anche quintessenza ; il suo moto è circolare, cioè perfetto. La regione terrena è *imperfetta* e *corruttibile* : sua materia sono i quattro elementi tradizionali della filosofia greca, *terra*, *acqua*, *aria*, *fuoco* ; il suo moto è rettilineo, cioè imperfetto. Aristotele collocava il principio motore dell'Universo esteriormente, in opposizione ai pitagorici che lo collocavano al centro. È interessante rilevare che la scala pitagorica dei valori cosmici, che definisce il centro come una posizione di « maggior onore » di qualsiasi posizione non centrale, ricompare in un contesto simile nel « *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, I,8 », di Copernico, dove questi, nel sostenere che la Terra si muove e i Cieli sono fermi, scrive : « La condizione di immobilità è considerata più nobile e più divina di quella di mutamento e di instabilità, la quale pertanto andrebbe attribuita piuttosto alla Terra che all'Universo. Aggiungo anzi che sembrerebbe alquanto assurdo attribuire movimento a ciò che contiene e sostiene e non a ciò che è contenuto e sostenuto, cioè alla Terra ». Fu la Meccanica di Newton che riuscì a fornire delle ragioni fisiche per i movimenti celesti, pur dovendosi riconoscere alla Teoria copernicana buona parte del merito del sorgere di quella dottrina, come scrive Sambursky. Copernico, tuttavia, rimane, in misura non piccola, un contemporaneo degli antichi scienziati greci, che anteponevano le ragioni teoriche a quelle empiriche. Nel *Fedone* di Platone si legge come Socrate considerasse la causa teologica come l'*unica vera* spiegazione dei fenomeni cosmici. Osserva ancora Sambursky (80 ; 104) che il panorama del nostro Universo ci venne spalancato il giorno in cui gli scienziati del secolo XVII rinunciarono a chiedersi : « Perchè ? », oppure : « A quale scopo ? » e si limitarono a porsi la domanda : « In che modo ? », ossia a indagare le « cause ausiliari » o cause secondarie, come Platone le chiama nel *Timeo*.

Circa la « perfezione » del moto circolare e l'« imperfezione » del moto rettilineo, queste sono, fra le altre, le considerazioni di Aristotele : « La linea retta percorsa dal moto rettilineo non può essere infinita, perchè non esiste nulla di simile ad una linea retta infinita, e, anche se esistesse, non sarebbe percorsa da alcunchè in moto : giacchè l'impossibile non accade ed è impossibile percorrere una distanza infinita. Un moto che ammette la possibilità di essere eterno è anteriore ad uno che non lo è. Orbene, il moto circolare può essere eterno : ma nessun altro moto, si tratti di trasporto o di moto di qualunque altra specie, può essere tale, perchè in tutti questi altri movimenti deve avvenire

un arresto, e col verificarsi di un arresto cessa il moto ». Le argomentazioni di Aristotele non sono sorrette dall'esperienza; tuttavia, sia nel passo citato, sia dove trae la negazione del vuoto dall'assurda conclusione che la velocità di caduta del vuoto dovrebbe essere infinita, sia in altri passi ancora, non possiamo non rimanere ammirati di fronte all'acutezza della maggiore mente speculativa dell'antichità, che, anche nei suoi errori, lasciava le impronte inconfondibili del genio di prima grandezza.

Galilei fonda la scienza moderna anteponendo l'esperienza alle considerazioni teoriche. «*Provando e riprovando*» fu il motto che assunse l'Accademia Fiorentina del Cimento, istituita nel 1657 da Leopoldo dei Medici allo scopo di fare esperienze ed osservazioni fisiche ed astronomiche, applicando allo studio della natura i canoni della indagine galileiana. Illusioni erano state ritenute da molti diverse scoperte di Galilei, che si proponeva di dimostrare, fra l'altro, che «le macchie solari sono cose reali e non semplici apparenze o illusioni dell'occhio o dei cristalli ». Taluni astronomi e filosofi s'erano rifiutati di perdere del tempo a considerarle. Cesare Cremonini, l'*Aristoteles redivivus*, allorchè Galilei lo invitò a guardare, attraverso il cannocchiale, Giove attorniato dai suoi satelliti, esclamò: « Quegli occhiali mi imbalordiscon la testa: basta, non ne voglio saper altro ». Alle insistenze di Galilei, replicò Cremonini « che lo strumento doveva essere stato costruito in modo tale che così si vedesse ». Quando Galilei ebbe notizia della sua morte, argutamente commentò: «Se dalla Terra non volle vedere Giove e i suoi satelliti, il suo spirito, nel suo viaggio verso il Cielo, li avrà visti attraversandolo ».

La reazione ai metodi essenzialmente speculativi dei Greci fu totale, e ciò era giustificato dal fatto che la scienza greca era rimasta, per tanti riguardi, ad uno stadio infantile. Ma lo sviluppo e l'approfondimento dei metodi sperimentali non tardarono a rivelare che neppure l'esperimento, da solo, l'osservazione, da sola, sono sufficienti per fondare su di essi la scienza. Eddington, al riguardo, scrive (29, *a*; 22 e 25): « Lo scienziato di solito professa di basare le sue opinioni sulle osservazioni e non sulla teoria. Le teorie, si dice, sono utili in quanto suggeriscono nuove idee e nuove direzioni di ricerca allo sperimentatore; ma il cimento della verità, il punto d'appoggio per le conclusioni, si trovano nei " fatti " nudi e crudi. Devo dire che non ho ancora trovato nessuno che applichi in pratica questo modo di vedere — e meno che mai lo sperimentatore positivo, il quale è tanto più dominato dalle sue teorie quanto meno è abituato a scrutinarle. *L'osservazione da sola non basta.* Non

siamo disposti a credere ai nostri occhi che allorquando ciò che ci mostrano è credibile. Sarà meglio ammetter francamente che la teoria detiene, e a buon diritto, una parte importante nel formarsi dell'opinione. Se davvero ci fosse una persona risoluta a scartar la teoria e ad ammettere solo i precisi fatti osservati, per quella persona *tutti* i libri d'astronomia sarebbero privi di significato: *poichè non vi sono fatti di pura osservazione sul conto dei corpi celesti.* Le misure astronomiche sono tutte, senza eccezione, misure di fenomeni aventi luogo in osservatori o in stazioni terrestri. Solo attraverso la teoria esse vengono tradotte in elementi di conoscenza di un universo esteriore.

Un osservatore, il quale riferisca di avere scoperto una nuova stella in una certa posizione, probabilmente non si rende conto di andar oltre i puri fatti di osservazione. Come osservatore, egli ha dato una interpretazione teoretica alle sue misure, col supporre, per ragioni teoretiche, che la luce si propaghi attraverso lo spazio in linea retta o quasi. Forse ci risponderà che, nell'ammettere che la luce si propaga in linea retta, non è partito da nessuna teoria, ma da un preciso fatto sperimentale. E allora si attirerà la domanda se, e in che misura, un esperimento eseguito nelle condizioni terrestri possa essere estrapolato fino ad applicarsi agli spazi interstellari.

Una teoria ragionata è certo superiore a una cieca estrapolazione. L'osservatore sbaglia completamente se suppone che la propagazione rettilinea della luce, ammessa in astronomia, sia stata verificata dagli esperimenti terrestri».

Riferendosi poi alla Teoria di Einstein e alla deflessione dei raggi luminosi prevista da detta Teoria e confermata sperimentalmente, Eddington prosegue: «Prima c'era una teoria che sosteneva propagarsi la luce invariabilmente in linea retta nello spazio vuoto; ma si è scoperto che è sperimentalmente inesatta, e che non può servir di base alle conclusioni di un osservatore. Ma forse il nostro osservatore è di quelli che non prestano fede alla deviazione della luce osservata durante le eclissi; o forse non la giudica un argomento sufficiente per abbandonare l'antica teoria. Ma allora ci dimostra in pratica che lo sperimentatore testardo fonda le sue idee molto più sulla fede nella teoria che sull'osservazione. Vorrei mettere in chiaro, insomma, che in Astronomia non è il caso di discutere se dobbiamo appoggiarci sui fatti oppure sulla teoria. I cosidetti fatti sono sempre interpretazioni teoretiche delle osservazioni».

Scrive Einstein (30, *d*; 316): «L'idea teorica non nasce indipendentemente dall'esperienza; nè può esser derivata dalla esperienza

attraverso un puro processo logico. Essa è prodotta da un atto creativo». E ancora Einstein (30, *d* ; 278) : « Errano quei teorici persuasi che la teoria sorga induttivamente dall'esperienza. Anche il grande Newton non era esente da questo errore (" Hypotheses non fingo ")».

Possiamo ora rispondere alla domanda che ci siamo posta : la scienza si fonda sui fatti o sulla teoria? La teoria, da sola, è insufficiente: ciò è provato dallo stato infantile della fisica presso i Greci, che erano, come s'è detto, essenzialmente dei teorici. I fatti, da soli, sono insufficienti : ciò è provato, ad es., dal comportamento della luce, che è, in un certo senso, contradditorio al punto che suggerì, in un primo tempo, teorie contrastanti come quella corpuscolare e quella elastica.

La scienza si sviluppa grazie ad un processo dialettico della mente dell'uomo, che pone alternativamente l'accento ora sul fatto ora sulla teoria, superando discordanze ed antitesi, per edificare un corpo coerente ed armonico di dottrina, che gli consenta, nel campo pratico, di allargare le frontiere del suo dominio sulla natura, e, nel campo teorico, di percorrere nuove vie per un maggiore approfondimento dell'aspetto filosofico della realtà.

Le idee influenzano, ora in via mediata ora in via immediata, il campo di prova delle esperienze. Abbiamo visto come la Teoria copernicana, che si fondava su considerazioni di puro carattere speculativo, come il « maggior onore » da attribuirsi al centro, trovò in Galilei e in Newton le basi scientifiche e sperimentali, che le consentirono di affermarsi. Il cosmo che Empedocle concepiva, con argomentazioni teoriche non sorrette dall'esperienza, come una specie di equilibrio dinamico tra le forze di attrazione e di repulsione, ha trovato una ragione fisica nella moderna Teoria relativista dell'Universo in espansione e nella Teoria Endosferica. La Teoria aristotelica, che vedeva i moti circolari nella regione celeste e i moti rettilinei in quella sublunare, trova nel sistema cosmocentrico, con le sue accentuate curvature spaziali (moti circolari) nelle profondità del cielo e le sue geodetiche quasi euclidee (moti rettilinei) nella zona prossima alla superficie terrestre, una ragione fisica, fondata sulle leggi sperimentali che governano il campo.

CAPITOLO XIV.

L'evoluzione della scienza.

Ogni nuova teoria ammette la precedente come « caso particolare » – Il comportamento della luce: carattere distintivo dei diversi modelli dell'Universo – Secondo carattere distintivo: la natura del movimento dei corpi – La Teoria di Newton è un « caso particolare » della Relatività Ristretta; la Relatività Ristretta è un « caso particolare » della Relatività Generale; la Relatività Generale è un « caso particolare » della Teoria Endosferica – Sintesi comparativa dei caratteri delle quattro Teorie: differenze qualitative e quantitative – Fra la Teoria della Relatività Generale e la Teoria cosmocentrica del Campo sussistono differenze di ordine solo quantitativo.

Nello sviluppo della scienza si osserva una fondamentale differenza fra il suo procedere presso gli antichi e il suo svolgersi dal tempo di Galilei ad oggi. Per esempio, fra la concezione dello spazio di Aristotele e quella antecedente di Democrito non vi è nulla che getti un ponte che le colleghi. La storia della scienza negli ultimi trecento anni è, invece, caratterizzata, nel suo sviluppo, da una successione cronologica e pressochè organica, come scrive Sambursky (80; 121), che non trova un parallelo nella scienza greca. La storia della fisica da Galileo ad oggi ci fa constatare come la scienza progredisca mediante approssimazioni, diciamo così, concentriche: ogni teoria contiene, infatti, quella che l'ha preceduta come « caso particolare ».

Dalla meccanica classica o newtoniana si è pervenuti a quella relativista o einsteiniana nel modo anzidetto. Nonostante le differenze di natura teorica e filosofica che intercorrono fra l'una e l'altra, nonostante la differenza formale del rispettivo metodo matematico, la meccanica di Newton è compresa in quella di Einstein come prima approssimazione. Dalla Teoria della Relatività, in ogni caso concreto, si può ripiegare sulla Teoria di Newton come prima approssimazione della realtà, approssimazione sufficiente per la descrizione di molteplici fatti.

La nota relazione della Relatività Ristretta

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{76}$$

pone in evidenza che le leggi della Dinamica relativista, nei fenomeni meccanici in cui figurano velocità piccole, cioè non confrontabili con la velocità della luce, coincidono con le leggi della Dinamica classica. Newton, nella sua Meccanica, non considerava velocità confrontabili con quella della luce, perchè in quel tempo non si conoscevano particelle o corpi animati da siffatte velocità. Laddove intervengono velocità, come quelle dei corpuscoli atomici, la Meccanica di Newton cade in difetto. Ma essa è contenuta nella Meccanica della Relatività Ristretta come « caso particolare », e precisamente nei casi in cui si hanno velocità trascurabili rispetto alla velocità della luce.

A sua volta la Teoria della Relatività Ristretta è contenuta come « caso particolare » nella Teoria della Relatività Generale, nella quale si ha la invarianza delle leggi naturali generali rispetto a tutti i possibili sistemi, ammettendo, appunto, che, con una opportuna scelta di coordinate, nell'« infinitamente piccolo » valga la Teoria della Relatività Particolare, come abbiamo illustrato nel cap. III della Parte seconda.

La Teoria di Einstein, anche per quanto riguarda la flessione dei raggi luminosi in un campo gravitazionale, si presenta come una teoria più comprensiva rispetto a quella classica. Nell'antica Teoria corpuscolare della luce di Newton, secondo la quale la luce doveva ritenersi come composta di corpuscoli pesanti, si considera già una flessione dovuta all'attrazione esercitata dal Sole sopra i corpuscoli che passano nelle sue vicinanze, ma i calcoli forniscono una flessione di solo 0'',87, mentre la Teoria relativista fornisce il valore di 1'',75, valore assai vicino a quello fornito dalle osservazioni in numerose spedizioni (nell'Australia Meridionale nel 1922; in Giappone nel 1936; in Brasile nel 1947). Partendo dalle relazioni einsteiniane che forniscono per la flessione il valore anzidetto, si può risalire alle formule fondamentali della Teoria della Relatività. Si può dire, allora, che la flessione dei raggi luminosi in vicinanza di masse attrattive (i calcoli sono risultati in buon accordo con le osservazioni) costituisce un carattere distintivo del modello einsteiniano dell'Universo. Può dirsi, che, mentre la Teoria classica considera *ovunque* rettilinea (in senso euclideo) la traiettoria del raggio luminoso (si può trascurare la lieve flessione prevista dalla Teoria newto-

niana, risultata, come sopra diciamo, assai inferiore alla realtà), la Teoria relativista considera altrettanto rettilinea siffatta traiettoria limitatamente alle zone che si trovano a grande distanza da masse gravitazionali: se si verifica questa condizione, allora la Teoria di Einstein non differisce dalla Teoria classica, la quale, pertanto, appare come un « caso particolare » della prima.

Nel nuovo concetto del mondo è ancora il comportamento della luce che ne costituisce il principale carattere distintivo. Le traiettorie luminose sono curve e queste curvature si vanno via via accentuando a misura che ci inoltriamo nelle profondità dello spazio sidereo. In vicinanza però della superficie terrestre, nel cosidetto spazio ordinario o d'esperienza, ove il campo universale è poco intenso, la curvatura del raggio luminoso è assai piccola. Con facile calcolo (considerando che l'arco di 1″ è uguale a $\frac{1}{206264{,}81}$ radianti), si vede che, per brevi tratti, per es., di m. 25, la flessione del raggio luminoso (tangente alla superficie terrestre) è di 1,75 secondi di arco. Prescindendo dalla *diversa* natura causale, il valore dell'anzidetta flessione è uguale al valore della flessione relativista di un raggio luminoso, che lambisce la corona solare. Per tratti ancora più brevi la traiettoria luminosa si confonde con la linea retta euclidea, e si ricade quindi nella Teoria classica. Pertanto la nuova Teoria del mondo, entro zone prossime alla Terra, e per brevi tratti, ammette come « casi particolari » la Teoria della Relatività e la Teoria newtoniana.

Possiamo così schematizzare quanto abbiamo detto. In assenza di campo la traiettoria del raggio luminoso è rettilinea (in senso euclideo) e vale la Teoria di Newton e quella della Relatività Ristretta.

In presenza del campo gravitazionale la luce subisce lievi flessioni, previste dalla Teoria Generale della Relatività, la quale, tuttavia, ammette come « caso particolare» la Teoria di Newton laddove il raggio luminoso è molto lontano da masse attrattive e il campo gravitazionale è, quindi, da considerarsi nullo.

Nel mondo endosferico, in zone vicine alla Terra e per brevi tratti, si hanno, per i raggi luminosi, flessioni molto piccole e la nuova Teoria non differisce dalla Teoria della Relatività, la quale costituisce pertanto un « caso particolare » del nuovo concetto del mondo ; sempre in prossimità della Terra e per tratti ancora più brevi la curvatura del raggio luminoso tende a zero e lo spazio può, quindi, considerarsi euclideo : la nuova Teoria coincide allora con la Teoria di Newton.

Prendendo il comportamento della luce come carattere distintivo delle diverse teorie, si vede come, a misura che si ampliano le zone spaziali, nelle quali si svolge il fenomeno luce, si hanno via via teorie più comprensive e generali: dalla Teoria classica si passa a quella della Relatività Generale, e da questa alla Teoria endosferica del mondo, verificandosi ancora una volta quel logico sviluppo della scienza, per il quale, da Galilei ai nostri giorni, ogni nuova teoria contiene quella che l'ha preceduta come « caso particolare ».

Un altro carattere distintivo delle diverse teorie è la natura del movimento dei corpi. Nella Meccanica classica i movimenti sono rigidi in ogni dove. Nella Meccanica Relativista, in prossimità di masse attrattive, si hanno lievi curvature variabili dello spazio: laddove si ha uno spazio a curvatura variabile il movimento non è rigido, i corpi in moto si deformano. « Il campo gravitazionale, scrive Einstein (30, *b*; 240) deforma i miei regoli rigidi ». Tali deformazioni, osserviamo subito, sono, nella Relatività Generale, poco sensibili. In zone molto lontane da masse attraenti il movimento dei corpi è rigido, e si ricade nella Teoria classica.

Nel nuovo concetto, ove, oltre al campo gravitazionale, si considera il campo che configura il mondo endosferico, le curvature spaziali variabili sono più accentuate a misura che ci addentriamo nello spazio cosmico: le deformazioni dei corpi in moto non rigido si accentuano quanto più sensibile diviene la curvatura. Nello spazio d'esperienza però, dove si hanno curvature trascurabili, i movimenti possono considerarsi rigidi e si ricade nella Teoria classica. Pertanto, anche per quanto riguarda la natura dei moti dei corpi, la nuova Teoria contiene le precedenti come « casi particolari ».

Possiamo dunque concludere così: la Teoria del campo contiene come « caso particolare » la Teoria della Relatività Generale; questa contiene come « caso particolare » la Teoria della Relatività Ristretta; e, finalmente, quest'ultima contiene come « caso particolare » la Teoria di Newton. La più comprensiva è, dunque, la Teoria del campo, la meno comprensiva quella di Newton.

L'evoluzione del concetto del mondo può esser descritta dai caratteri delle diverse teorie, che si possono condensare così:

Teoria di Newton: spazio assoluto, rigido, omogeneo, isotropo (curvatura nulla); tempo assoluto; movimenti rigidi; propagazione rettilinea della luce considerata con velocità infinita; geometria euclidea; trasformazione di Galilei; principio di Relatività galileiano: le

leggi meccaniche sono invarianti rispetto a sistemi inerziali; meccanica classica.

Relatività Ristretta : spazio-tempo assoluto, rigido, omogeneo, isotropo (curvatura nulla); movimenti rigidi; propagazione rettilinea della luce con velocità costante (*indipendente* dal moto della sorgente); geometria pseudoeuclidea; trasformazione di Lorentz; principio di Relatività Ristretta: le leggi meccaniche ed elettromagnetiche sono invarianti rispetto a sistemi inerziali; meccanica relativista.

Relatività Generale: spazio-tempo non assoluto («solidarietà» dello spazio-tempo con i fenomeni); spazio-tempo non rigido, non omogeneo, non isotropo (a curvatura *praticamente* trascurabile e assai poco variabile); movimenti quasi-rigidi; propagazione curvilinea (lievissime curvature) della luce con velocità variabile; geometria non euclidea a curvatura variabile (di tipo riemanniano); elemento lineare ds invariante rispetto a tutte le possibili trasformazioni dei parametri x_i; principio di Relatività Generale: le leggi meccaniche ed elettromagnetiche sono invarianti rispetto a sistemi animati di moto qualunque; meccanica tensoriale.

Teoria Endosferica: spazio-tempo non assoluto, non rigido, non omogeneo, non isotropo (a curvatura variabile da un minimo valore ad un valore infinito); movimenti non rigidi; propagazione curvilinea della luce con velocità variabile; geometria non euclidea a curvatura variabile; trasformazione circolare; principio di Relatività Generale; meccanica tensoriale.

Rilevo che nel trattare la Teoria Endosferica del campo mi sono limitato ad esporre solo la parte nuova, che la caratterizza, trascurando di menzionare tutti quegli elementi che fanno parte della Teoria Generale della Relatività e che si intendono integralmente ammessi nel nuovo spazio, nel modo e nel senso con cui vi abbiamo considerata valida la legge di Newton, ecc. (vedasi cap. VI). Infine osserveremo che fra le precedenti Teorie vi sono differenze qualitative e quantitative. Per es., lo spazio, assoluto nella Teoria di Newton, non lo è nella Relatività Ristretta (differenza qualitativa). Lo spazio-tempo, assoluto nella Relatività Ristretta, non lo è nella Relatività Generale; la propagazione della luce, rettilinea nello spazio uniforme della Teoria di Newton e nella Relatività Ristretta, non lo è nella Relatività Generale; i moti, rigidi nella Teoria di Newton e nella Relatività Ristretta, non lo sono

nella Relatività Generale (differenze qualitative). *Fra la Relatività Generale e la Teoria Endosferica non vi sono differenze qualitative, ma solo quantitative*: entrambi gli spazi sono curvi, con la differenza *quantitativa* che le curvature sono assai più accentuate nella seconda delle due Teorie; la propagazione della luce non è rettilinea in nessuna delle due Teorie, con la differenza *quantitativa* che le flessioni sono molto più sensibili nella Teoria Endosferica; in tutte e due le Teorie i moti non sono rigidi, ma, mentre nella Relatività Generale le deformazioni sono trascurabili, nell'altra Teoria sono, invece, molto considerevoli. *Dal punto di vista qualitativo la Teoria Endosferica non differisce dalla Teoria della Relatività Generale, mentre ne differiscono notevolmente le precedenti Teorie di Newton e della Relatività Ristretta.* La nuova concezione del mondo non introduce nessuna ipotesi essenzialmente nuova, nessun principio o concetto fisico nuovo, ma si fonda integralmente su ipotesi, principî e concetti fisici già universalmente ammessi; si fonda, in breve, sugli stessi fatti ed esperimenti su cui è costruita la cosmogonia classica: si tratta di un ulteriore passo innanzi nel cammino della scienza, «dovuto a nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo».

CAPITOLO XV.

I razzi spaziali e la scienza astronomica.

I lanci del Lunik III e di altri razzi nell'interpretazione classica e in quella endosferica: non costituiscono esperimenti cruciali – L'Astronomia, scienza sperimentale in senso *lato*: manca ancora, nelle esperienze, il controllo del senso del tatto e del senso del movimento.

Gli esperimenti spaziali effettuati dagli americani e, più ancora dai russi, negli ultimi anni, hanno avuto una risonanza pari alla loro importanza. Il Lunik III, che fotografa la faccia «nascosta» della Luna, costituisce un successo scientifico immenso. Alla mente dell'uomo della strada, dell'uomo di media cultura e dell'uomo di cultura anche elevata ma specializzata in branche diverse dalla fisica, i successi ottenuti mediante il lancio di razzi spaziali si presentano come una «prova definitiva» dell'esattezza della classica immagine fisica del mondo. La mente del fisico è più prudente: egli sa che uno stesso fatto, uno stesso fenomeno può essere spiegato da teorie anche molto diverse, e su ciò abbiamo più volte parlato ed esemplificato. Riporto ancora una volta quanto scrive Poincaré (74, *a*; 155): «Nessuna teoria sembrava più solida di quella di Fresnel, che attribuiva la luce ai movimenti dell'etere. Poi, invece, le si preferì la Teoria di Maxwell. Tuttavia entrambe le Teorie soddisfacevano allo scopo precipuo di prevedere fenomeni ottici. Le equazioni differenziali esprimono dei rapporti, e, se questi rapporti conservano la loro realtà, le equazioni differenziali restano vere. Esse ci insegnano che vi è un certo rapporto fra qualcosa e qualche altra cosa: solo che questo qualcosa un tempo lo chiamavamo *movimento*, e ora lo chiamiamo *corrente elettrica*». Un'equazione della *stessa forma* si è presentata nella cinematica dei fluidi incompressibili, nella Teoria di Newton, nell'elettrostatica e magnetostatica. Questi ed altri esempi abbiamo riferito alla fine del Cap. VII della Parte I. Dobbiamo, dunque, fare alcune considerazioni in aggiunta a quanto abbiamo detto nel Cap. XII di questa Parte III.

Ai razzi spaziali, perchè potessero abbandonare il campo di « gravitazione terrestre », è stata impressa la necessaria *velocità di fuga*, che gli scienziati hanno calcolato, con estrema esattezza, in base alla legge di Newton. Utilizzando la stessa formula, ma attribuendo alle grandezze, che vi figurano, significati relativi a uno spazio non euclideo, abbiamo ricavato anche noi la velocità di fuga (cap. VI di questa Parte III) : anche noi, che ci rappresentiamo il mondo in maniera notevolmente diversa dalla classica, abbiamo ottenuto per essa, effettuando lo *stesso* calcolo matematico, km. 11,170 al secondo. Il Lunik II, per raggiungere la Luna, ha percorso in circa 36 ore i 384.400 chilometri, che separano la superficie terrestre dalla Luna : per la Teoria classica quei chilometri sono euclidei, per la Teoria endosferica quei chilometri non sono euclidei. *Per entrambe le Teorie le unità di spazio fisico, le unità di energia*, che separano la superficie terrestre dalla Luna sono 384.400 (Vedasi cap. IV). L'esperimento del Lunik è un esperimento fisico e non una astrazione geometrica; sono i chilometri fisici quelli che il Lunik ha percorso e non i chilometri geometrici ; è lo spazio fisico, è il campo, è l'energia costituente lo spazio fisico che interviene in siffatti esperimenti e non lo spazio geometrico. Nulla di nuovo diciamo qui, d'altra parte : abbiamo già visto nel cap. III di questa Parte III, come già Einstein concepisse il mondo come un campo, quando asseriva : « Campo è energia. Si ha materia ove la concentrazione di energia è grande ; si ha campo ove la concentrazione di energia è debole ». Il campo endosferico, la energia totale dell'Universo cosmocentrico è quantitativamente identica all'energia totale dell'Universo copernicano. Ciò che muta è la distribuzione della energia, la quale è : *non uniforme* nel mondo endosferico, raggiungendo densità estremamente elevate, a misura che ci si avvicina al centro, per l'estrema concentrazione dell'energia stessa ; *uniforme* nel mondo classico, con una densità estremamente bassa (tendente a zero) per l'estrema rarefazione di detta energia (lo spazio « vuoto, deserto » di Eddington, di Lämmel e di altri). Il Lunik III ha fotografato la Luna effettuando, secondo il punto di vista classico, un moto rigido e, secondo il punto di vista della nuova Teoria, un moto non rigido : sull'argomento abbiamo discorso nel cap. V di questa Parte III ; il razzo e i suoi apparecchi, spostandosi nello spazio, e subendo contrazioni (viaggio d'andata) e dilatazioni (viaggio di ritorno), istante per istante subivano delle modificazioni, rimanendo però simili a se stessi in quanto a struttura; di qui il normale funzionamento degli apparecchi. E quanto ora diciamo non costituisce nulla di nuovo : abbiamo visto nel cap. V quanto ha asserito Eddington a proposito

dello spazio piano (privo di caratteristiche) e di quello curvo (dotato di caratteristiche) e del suo netto rifiuto dello spazio fisico uniforme, a favore di uno spazio fisico a curvatura variabile. Ora, in uno spazio a curvatura variabile, ovviamente i moti non sono rigidi. « Il campo gravitazionale, scrive Einstein (30, *b* ; 240) deforma i miei regoli rigidi ». Nel capitolo precedente abbiamo visto che la nuova concezione del mondo non implica nessun concetto fisico nuovo, nessuna nuova ipotesi : da un punto di vista qualitativo la Teoria Endosferica non differisce dalla Teoria della Relatività Generale.

I successi conseguiti mediante il lancio di satelliti artificiali non costituiscono una « prova » dell'esattezza della classica concezione del mondo, anche se la loro costruzione e tutto l'ingente complesso di operazioni tecniche e di calcoli teorici ha poggiato sui principî e sulla struttura del mondo copernicano. Come già abbiamo detto nel cap. XII di questa Parte III, attribuire allo spazio reale i caratteri del mondo classico sol perchè, in via sperimentale, si sono ottenuti sorprendenti successi, sarebbe lo stesso che attribuire realtà a un certo rettangolo sol perchè si è verificato che l'area trovata per esso, nel campo pratico, è risultata esatta, mentre realmente si operava su una superficie sferica, di cui il rettangolo era solo una superficie equivalente, astratta, ma più comoda per effettuarvi dei calcoli. Analogamente, diciamo, i brillanti successi ottenuti non implicano affatto che lo spazio *reale* sia euclideo, anche se costruzioni di razzi, calcoli ed esperimenti sono stati effettuati in base a principî, relazioni e tecniche di uno spazio di quella natura. Ripetiamo : come per la superficie della sfera dicevamo che, in luogo di operare su di essa, operavamo su un certo rettangolo considerato come la superficie sferica « astrattamente sviluppata » sul piano (mi si consenta questo modo di esprimermi), ottenendo ugualmente la sua area esatta, verificabile con sufficiente approssimazione in sede sperimentale, così per lo spazio cosmico, in luogo di operare sullo spazio *reale*, si è operato su uno spazio *astratto*, ottenendo ugualmente risultati che si sono rivelati sperimentalmente esatti. Operare nello spazio cosmico supposto piano e ottenere risultati sperimentali esatti non significa che, per *tale* motivo, debba considerarsi provato che lo spazio reale è piano. Anche se è, e resta, più agevole operare nello spazio piano, la *realtà fisica* è verosimilmente un'altra, come abbiamo ampiamente illustrato.

In seguito agli esperimenti spaziali anzidetti si è osservato « che, come nel caso dell'eclisse del Lunik III causato dalla Luna, l'uomo non è più un semplice spettatore dei fenomeni che avvengono nell'Universo, ma è diventato artefice di uno di questi fenomeni ; che le forze che muo-

vono i corpi nello spazio non sono più soltanto quelle impresse dalla natura, ma sono anche quelle applicate direttamente dall'uomo, con un intendimento preciso e con un fine prestabilito »; e si è concluso, quindi, « che l'astronomia non è più soltanto una scienza naturale puramente sistematica e deduttiva, ma è divenuta una scienza sperimentale, di cui l'uomo può non soltanto studiare gli oggetti, ma è in grado di intervenire direttamente per regolarne i fenomeni ». Queste ed altre sono le considerazioni di Angelo Coen, abile e acuto divulgatore nella stampa quotidiana degli esperimenti spaziali. Inoltre, il giornale « Il Messaggero » del 20 settembre 1959 informava : « Il Prof. Mikhailov, membro corrispondente dell'Accademia Sovietica delle Scienze e direttore dell'Osservatorio di Poulkovo, ha notato che " l'Astronomia ha cessato di essere una scienza di osservazione per diventare una scienza sperimentale ", in quanto gli apparecchi installati a bordo dei razzi cosmici permettono le osservazioni finora impossibili a realizzarsi dalla Terra, per la presenza dell'atmosfera ».

Per scienza sperimentale s'intende generalmente una scienza fondata su esperienze di laboratorio, per la cui realizzazione e per il cui studio intervengono, oltre al senso della vista, quelli del tatto e del movimento. Non sembra, quindi, accettabile, per ora, considerare l'Astronomia come una scienza sperimentale in senso stretto, ma solo in senso lato, per il fatto che sono stati effettuati esperimenti nello spazio cosmico, che, sebbene non siano stati seguiti e controllati *da vicino*, tuttavia si è potuto verificare che hanno sortito gli effetti previsti. Aggiungo che, se ad un osservatore fosse dato accompagnare un corpo in movimento nello spazio, egli non potrebbe in nessun modo verificare le deformazioni subite da quello come conseguenza del suo moto non rigido, e ciò perchè anch'egli, insieme con i suoi strumenti di misura, sarebbe soggetto alle stesse leggi, cui è soggetto il corpo in moto.

Quanto alla velocità e alla posizione dei satelliti e dei razzi spaziali, è noto che ci vengono rivelati dai segnali radio, che, per essere onde elettromagnetiche, hanno la stessa natura della luce, per cui non vi è che ripetere per essi quanto è stato detto per i mezzi ottici utilizzati per stabilire le velocità e le distanze degli astri.

Per quanto riguarda lo studio dello spazio cosmico, poco è stato pubblicato finora di preciso circa la conclusioni degli scienziati americani e russi in seguito ai loro esperimenti. Trascrivo solo alcune righe di uno scritto, apparso su « L'Espresso » del 18 ottobre 1959, di Alberto Ducrocq, professore di Fisica Elettronica e presidente del Centro di Studi Atomici e Nucleari francese : « Sia i "pioneers" americani, sia i Lunik

I e II, ci hanno rivelato l'esistenza intorno al nostro globo di due vaste cinture di radiazioni, che si estendono a più di 80.000 chilometri dalla Terra, e può darsi molto più lontano. In altre parole *lo spazio cosmico non è realmente vuoto come si credeva fino ad ora,* ma è quasi certo che queste cinture di radiazioni sono l'oggetto di un'attività prodigiosa. Esse subiscono fra l'altro delle deformazioni considerevoli ogni 28 giorni, cioè ad un ritmo che è quello della rotazione del Sole su se stesso ».

Colgo un'altra frase letta su una rivista: « I satelliti artificiali hanno mostrato che lo spazio è cento volte meno vuoto di quanto non si fosse creduto prima ».

Da Washington A. P. scriveva al « Messaggero » (31 marzo 1960) : « Il pianeta artificiale americano " Pioneer V " ha bucato l'anello protonico, largo almeno un centinaio di migliaia di chilometri e creato dal continuo " vento solare ", la corrente protonica emessa dal Sole... Il satellite ha investito il turbine elettrico a poco più di 50.000 chilometri dalla Terra... Una considerazione interessante è che le varie condensazioni di energia spaziale provocano cadute di velocità di varia proporzionale entità sull'avanzata di un corpo. Vari satelliti americani, come pure gli Sputnik, hanno confermato il fenomeno. Ad esempio Vanguard I e Sputnik III avevano singolari anomalie di velocità corrispondenti alle fasi di modificazioni provocate dalla intensità della radiazione solare... Si parlò di " nubi " di elettro-corpuscoli, che, attraverso un gioco di collisioni, formavano una specie di ispessimento proprio davanti al satellite... Era questo un linguaggio che solo una decina di anni prima sarebbe stato considerato fantasioso. Eppure ci si è dovuto inchinare alla realtà dei fatti... Il quinto pioniere ha ritrovato l'anello dove lo aveva trovato, in verità, il capostipite Pioneer I. Ma allora si stentò a credere alla presenza di un simile torrente circolare di elettricità ».

Sorge, allora, spontanea l'attendibile ipotesi che siffatti torrenti di elettricità non siano un privilegio delle zona terrestre, ma si trovino anche altrove negli spazi irradiati dal Sole, dando luogo a « cadute di velocità », anche molto sensibili, dei pianeti (specialmente di quelli interni). Ma tali *cadute* non sono mai state osservate e, inoltre, i calcoli, fondati sulla formula di Newton, e interpretati attribuendo alle grandezze e alle variabili, che vi figurano, significati euclidei, hanno fornito i brillanti positivi risultati a tutti noti. D'altra parte i fatti emersi specialmente dai recenti esperimenti, anche interpretati in senso classico, inducono ad abbandonare l'ipotesi di uno spazio « vuoto », « deserto » (Eddington), caratteristico dello spazio fisico euclideo. Vi è, dun-

que, contrasto fra osservazioni ed esperimenti! Pertanto, perchè l'accordo fra calcoli teorici, fattori ottici ed esperienze sussista, bisogna interpretare le osservazioni in senso non euclideo, riferendo le velocità dei corpi celesti a unità di misura *locali*; bisogna, cioè, enunciare l'ipotesi di uno spazio non euclideo a curvatura variabile, attribuendo alle grandezze e alle variabili delle formule matematiche significati non euclidei: la nostra ipotesi del campo universale elimina la sconcertante contraddizione implicita nell'interpretazione classica.

La scienza astronomica sembra si avvii a indicarci, sul piano sperimentale, il vero volto del mondo.

CAPITOLO XVI.

Riflessioni.

Il sapere si scinde nei vari rami di dottrina: sorge così il fisico, il matematico, il filosofo, il letterato, l'artista. E, ancora, la stessa fisica si scinde in diverse branche, così pure la matematica, la filosofia, la letteratura, l'arte. E nascono via via gli scienziati, i filosofi, i letterati, gli artisti specializzati, competenti in una particolare branca del sapere. Il libro, che ho condotto a termine, è necessariamente diretto ai competenti, in particolare ai fisici e, in qualche scorcio, ai filosofi. Tuttavia il sapere, nella sua accezione più ampia, non ammette suddivisioni, che, per quanto praticamente necessarie, sono artificiose ; nessuna branca è indipendente dalle altre, nessuna branca può essere profondamente compresa se non viene illuminata dalle altre, cui è intimamente legata : il sapere è una sintesi, limite supremo cui tende la mente dell'uomo.

La cultura, attinta in profondità, è un raro dono, di cui sono fortunati possessori i non numerosi competenti. Poi c'è il resto dell'umanità, diversamente avviata nel campo pratico del lavoro manuale o professionale, che non ha vera competenza in nessuna branca del sapere. Dobbiamo considerare questo grandissimo numero di esseri umani per nulla partecipi del « sacro convito » ? Certamente no, perchè ogni essere umano ha una mente che pensa, ha un'aspirazione di conoscere, un intuito e una capacità più o meno acuta di penetrazione, che lo sospingono alle soglie del « tempio » e, per vie più o meno rigorose, gli fanno cogliere alcune gemme, alcune riposte verità, nella loro smagliante bellezza ed armonia.

L'ansia di conoscere è dettata non solo dalla mente dell'uomo, ma anche dalla sua sensibilità, dal suo cuore. Nel più freddo scienziato alberga il calore di un desiderio di evasione, di libertà: si vuol conoscere per librare le ali verso orizzonti più vasti, che attenuino l'angustia delle molte ore grigie della vita che scorre.

Nei celebri navigatori, oltre al desiderio della scoperta, vi era anche una esigenza diversa : sentivano il fascino della conquista di un nuovo

lido, per acquietare la loro ansia di libertà. L'astronauta, che si accinge ad attraversare gli spazi, è spinto alla rischiosa impresa da una brama di sapere non meno che da una brama di evasione. Forse gli uomini si illudono, a volte, di evadere mutando posto, laddove l'evasione è, probabilmente, un fatto psicologico di natura squisitamente interiore. L'ansia di evasione, l'ansia del nuovo, che, in una ricerca disordinata, spesso esaltata e vana, accanto all'arte, ha fatto nascere la pseudoarte, accanto alla letteratura la pseudoletteratura, accanto alla critica la pseudocritica, accanto alla tensione degli opposti, feconda di verità, la loro ibrida e sterile confusione, sia, insieme e sopratutto, slancio e ansia di cogliere aspetti più intimi, più riposti, più veri della realtà, nel senso più comprensivo di questa parola.

Le idee influenzano l'immagine che ci formiamo delle cose; l'immagine delle cose influenza le nostre idee. Gli antichi costruivano il mondo in base a concetti di ordine teorico, senza cercare l'appoggio dell'esperienza. Poi nacque la scienza sperimentale, che, a sua volta, modificò, o, addirittura, fece cadere concetti e teorie tradizionali, rivelandone l'infondatezza.

Il sistema del mondo copernicano spinge l'uomo ad evadere verso l'« infinito ».

L'infinito spaziale, geometrico, dell'universo esosferico appare coincidere con l'infinito psicologico : si cerca al di fuori, nelle sterminate lontananze, l'infinito che, invece, è dentro di noi, nella contrastante molteplicità dei nostri pensieri. Il mondo endosferico potrebbe apparire una costrizione per chi si illudesse che evasione psicologica sia lo stesso che evasione fisica. L'immagine fisica del mondo endosferico suggerisce idee di raccoglimento, idee di unione e di sintesi, in luogo dei concetti di estensione, di vanità e di dispersione, che emergono dal « vuoto » sterminato spazio classico. Il nuovo mondo presenta alla mente l'Universo e non gli « Universi », il Sole e non i «Soli», la potenza e non l'estensione, la concentrazione e non la dispersione. L'infinitamente grande coincide con l'infinitamente piccolo. La potenza e l'atto di Aristotele sembrano trovare una ragione fisica nel sistema cosmocentrico. La nuova immagine del mondo appare volta ad accrescere nell'uomo la sua fiducia nei valori che, ad onta di ogni sterile scetticismo, sono atti a sorreggere la vita degli uomini: valori di collaborazione e di solidarietà, che, tradotti in opere concrete, possono essere forieri di una novella età.

RIASSUMIAMO

La concezione newtoniana dell'Universo presentava alcuni punti deboli, che Einstein colmò soddisfacentemente con la sua Teoria della Relatività, pervenendo alla conclusione che *l'Universo reale non è euclideo*, il che significa che i fondamentali fenomeni della natura, in particolare la gravitazione, suggeriscono, per una loro adeguata descrizione, *una geometria non euclidea*, e precisamente una geometria di tipo riemanniano : alle due astrazioni sovrapposte, la legge di inerzia e il campo statico delle forze della Teoria classica, Einstein sostituisce una legge di inerzia *generalizzata* che fonde in sè le due anzidette astrazioni della dinamica di Galilei.

Il mondo di Einstein lascia però immutati altri aspetti poco soddisfacenti della Teoria copernicana, nella quale, 1) non si spiega : *a*) il comune comportamento delle Cefeidi, *b*) la simmetrica caduta sulla superficie terrestre dei raggi cosmici, *c*) il fatto che la Terra sia il più denso dei corpi del sistema solare e il « pianeta » favorito per la sua abitabilità; 2) si è condotti ad ammettere: *a*) un Universo di infinite masse, implicito nella legge di Newton, *b*) il fenomeno poco verosimile della favolosa durata dei raggi luminosi (miliardi di anni-luce), *c*) il fatto poco « *naturale* » dell'omogeneità, isotropia e rigidezza dello spazio (la Teoria einsteiniana rifiuta effettivamente uno spazio siffatto, ma, da un punto di vista quantitativo, lo spazio curvo della Teoria della Relatività, praticamente, non differisce dallo spazio newtoniano) ; 3) la dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole e dai milioni di Stelle-Soli viola il principio di economia cosmica e di conservazione dell'energia ; 4) si propugna fra atomo e sistema solare una analogia poco legittima data la «singolare differenza» fra essi messa in luce da Planck; 5) si danno incerte e insufficienti spiegazioni : *a*) delle cause delle differenze di temperatura nel corso delle stagioni, *b*) dell'uniformità della forza di gravità, *c*) della luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna, *d*) dell'origine del magnetismo terrestre.

Esaminiamo dunque i punti di partenza del sistema classico : si attribuiscono allo spazio astronomico (spazio di tipo ottico o, se si vuole,

dato che l'abbiamo in parte esplorato con onde e segnali radio, di tipo elettromagnetico) i caratteri dello spazio ordinario ; la luce percorrebbe traiettorie rettilinee nel senso euclideo. Le esperienze, per i risultati inevitabilmente approssimati cui pervengono, consentono solo formulare *l'ipotesi* che la propagazione della luce sia rettilinea. Fondamentale è la circostanza che l'occhio *prolunga* mentalmente i raggi ; ogni oggetto o sorgente luminosa appare trovarsi nella direzione, con la quale i raggi luminosi, uscenti da detto oggetto o sorgente luminosa, penetrano nell'occhio o nella camera oscura di una macchina fotografica. Nei limiti degli errori di osservazione, in buono accordo con i fatti dell'esperienza ordinaria, possono ritenersi ugualmente valide sia la legge di propagazione rettilinea sia una legge di propagazione curvilinea. Pertanto il trasferimento allo spazio astronomico dei caratteri euclidei dello spazio ordinario non è sorretto da valide esperienze.

La simmetrica caduta sulla superficie terrestre dei raggi cosmici suggerisce l'ipotesi di una sorgente centrale irradiante *uniformemente* i punti di una superficie sferica *concava* ; cadrebbero così altri punti deboli, come il comune comportamento delle Cefeidi, la dispersione della quasi totalità dell'energia emessa dal Sole, ecc.

D'altra parte il concetto di campo, validamente affermatosi nel secolo scorso, per la sua immensa portata, suggerisce una immediata estrapolazione : l'idea, cioè, che *l'Universo, nel suo complesso, abbia la struttura di un campo.* Già Einstein affermò l'esistenza del campo universale, senza tuttavia insistere sulla necessità di precisarne le sorgenti. Formuliamo, pertanto, l'ipotesi di un campo universale, le cui sorgenti sono il Sole e la fonte dei raggi cosmici (Centro Stellare), situata nel centro di una sfera cava. Siffatta immagine fisica del mondo è d'accordo con i dati d'osservazione ? Esiste una trasformazione geometrica che consenta di passare dallo spazio classico euclideo ad uno spazio non euclideo e nella quale si abbia una corrispondenza puntuale biunivoca con invarianza degli angoli ? Tale trasformazione effettivamente esiste sotto il nome di *trasformazione per raggi vettori reciproci o circolare o per inversione.* Nella trasformazione il piano all'∞ (ossia le infinite direzioni da cui fra l'altro provengono i raggi cosmici cadenti simmetricamente sulla Terra) si trasforma nel centro della sfera d'inversione, che abbiamo chiamato Centro Stellare, l'altra sorgente cioè, oltre il Sole, del campo universale. Le rette euclidee si trasformano in generale in cerchi o archi di cerchi ; la tangente rettilinea dello spazio esosferico si cangia in tangente curvilinea dello spazio endosferico. Le due tangenti, tuttavia, nei brevi tratti della zona terrestre, non differi-

scono sensibilmente. *Le rette euclidee* sono le geodetiche dello spazio euclideo; *le rette non euclidee*, cioè, in generale, i cerchi e gli archi di cerchi, in cui, mediante la trasformazione circolare, si mutano le rette euclidee, sono le geodetiche dello spazio non euclideo. Applicando al mondo copernicano il procedimento di inversione, si perviene ad una configurazione universale analoga a quella di un campo elettrico o magnetico. Le radiazioni solari percorrono le geodetiche curvilinee o linee di forza del campo. Le curvature, in prossimità della superficie terrestre, non sono molto sensibili, per cui le geodetiche curvilinee non si discostano sensibilmente da un andamento rettilineo, e pertanto vi si può ammettere, in accordo con i dati di osservazione, sia l'ipotesi della propagazione rettilinea della luce sia l'ipotesi della propagazione curvilinea. A misura però che ci si avvicina al centro della sfera, le geodetiche accentuano sempre di più le loro curvature e lo spazio acquista un carattere nettamente diverso da quello euclideo. Il campo universale è uno spazio a curvatura variabile, dove gli spostamenti, i moti dei corpi non sono rigidi.

Il bastimento che va « dietro l'orizzonte », si cela sotto la tangente: se questa è supposta rettilinea (spazio euclideo) il fenomeno del bastimento *prova* la *convessità* della Terra; se la tangente, invece, si suppone curvilinea (spazio non euclideo) allora il fenomeno del bastimento *prova* la *concavità* della Terra.

L'americano Morrow ha scoperto un procedimento pratico, per l'applicazione sintetica della trasformazione circolare: egli ha realizzato i diagrammi di trasformazione del sistema solare, delle fasi lunari, delle eclissi, delle parallassi, ecc. Si dà una chiave geometrica per trasformare chilometri di spazio euclideo in termini o valori di spazio non euclideo a curvatura variabile. A due rette parallele euclidee corrispondono due rette parallele non euclidee: entrambe limitano una unità di energia, uniformemente distribuita nel caso delle parallele euclidee, non uniformemente distribuita nel caso delle parallele non euclidee. I chilometri euclidei sono rappresentati da segmenti uguali, perchè, essendo l'energia, nello spazio euclideo, uniformemente distribuita, ciascuno di essi deve rappresentare una quantità di energia costante. I chilometri non euclidei sono rappresentati da archetti o segmenti disuguali, perchè, essendo l'energia, nello spazio non euclideo, non uniformemente distribuita, ciascuno di essi deve rappresentare una quantità di energia costante. La totalità della massa-energia del mondo esosferico è uguale alla totalità della massa-energia del mondo endosferico: diversa è la densità nei due spazi. Le distanze, i volumi calcolati nei

due spazi sono numericamente identici, mentre i corpi nello spazio endosferico hanno densità, in generale, enormemente maggiore di quella dei corpi supposti nello spazio esosferico. E precisamente : lo spazio-energia del mondo endosferico è estremamente denso presso le sorgenti, decrescendo la densità a misura che ci si avvicina alla Terra ; lo spazio-energia del mondo esosferico è estremamente rarefatto ovunque (salvo nei punti singolari), è il « vuoto », il « deserto » di Lämmel, Eddington ed altri. Lo spazio classico ammette una unità di misura assoluta : esso è privo di caratteristiche. Lo spazio endosferico ammette in ogni punto e secondo ogni giacitura e ogni direzione una unità di misura sottomultipla del raggio di curvatura in quel punto e secondo quella giacitura e quella direzione : esso è dotato di caratteristiche (curvature). La legge di Newton, valida nello spazio classico, è altrettanto valida in quello endosferico. Le formule della Meccanica Celeste classica sono applicabili al nuovo spazio, purchè alle grandezze e alle variabili, che in esse figurano, si attribuiscano i significati e i valori propri dello spazio endosferico. Si urta contro il più elementare buon senso non appena ci si riferisca al nuovo spazio nei termini del vecchio, e viceversa. Estrapolando nel mondo endosferico la legge secondo la quale all'interno di una sfera cava omogenea il campo gravitazionale è nullo, non si ha « attrazione terrestre », ma *repulsione solare* con identici effetti. Anche la variazione di g (accelerazione di gravità) trova, nel nuovo concetto, soddisfacente spiegazione. Il moto di rotazione terrestre si ha in entrambi i sistemi ; il moto di «rivoluzione» della Terra non è che il moto del Sole, attorno allo Zodiaco, su un piano, che forma con l'equatore celeste un angolo di 23° 27' ; i moti della Terra e del Sole danno luogo all'alternarsi del giorno e della notte e alle stagioni. Fasi lunari, eclissi solare ed eclissi lunare, occultazioni di stelle sono esaurientemente spiegati anche nel nuovo concetto. L'invarianza degli angoli, nella trasformazione per raggi vettori reciproci, consente ritrovare nel nuovo spazio le stesse parallassi calcolate nel sistema classico ; i dati d'osservazione sono, nei due spazi, ovviamente identici : muta solo la loro interpretazione. Cosa vi è « al di fuori » della sfera cava? Non vi è « al di fuori » : la profondità della Terra cava misura *numericamente* quanto il raggio della Terra solida e cioè, in media, 6370 km. *non* euclidei, i quali sono di lunghezza sempre crescente fino a diventare infinita : la densità della Terra va decrescendo indefinitamente nelle profondità fino a tendere a zero.

La relazione esistente fra i due spazi implica che ogni relazione valida in una delle due concezioni è necessariamente valida anche nel-

l'altra. La nuova Teoria spiega tutti i fatti spiegati dalla Teoria classica, e spiega altresì alcuni fatti, che, nella concezione copernicana, appaiono accidentali, mentre nel nuovo concetto non si discostano da una linea razionale, circostanza questa che conferisce maggior validità (verità) alla concezione endosferica piuttosto che a quella tradizionale. La simmetrica caduta sulla Terra dei raggi cosmici, il comune comportamento delle Cefeidi, la densità della Terra *inferiore* a quella degli altri corpi del sistema solare, l'origine del magnetismo terrestre, la luminosità del cielo notturno senza nubi e senza Luna, sono fenomeni impliciti nella stessa struttura del mondo endosferico, senza la necessità di introdurre nuove ipotesi, più o meno plausibili, per essere spiegate. Il campo endosferico è uno spazio non uniforme, sede di moti non rigidi. L'uniformità dello spazio è avversata da autorità scientifiche come Eddington ed altri, per i quali uno spazio privo di caratteristiche (curvature) è poco « naturale ». La favolosa durata dei raggi luminosi (miliardi di anni-luce) è una necessaria conseguenza della Teoria classica ; altrimenti probabilmente sarebbe stata rifiutata dai fisici. Nel nuovo concetto siffatto problema può trovare una soluzione soddisfacente. La teoria endosferica non viola la legge fondamentale della conservazione dell'energia, non rispettata dalla Teoria classica, per la quale la quasi totalità dell'energia emessa dal Sole va dispersa. Le cause delle differenze di temperatura, nel corso delle stagioni, insufficientemente spiegate dalla Teoria copernicana, nel nuovo concetto appaiono più attendibili e complete. Questi sono i principali fatti, che consentono dare una risposta alla domanda : poichè i due spazi sono equivalenti, quale delle due Teorie è la più valida (la vera)? Poichè la nuova Teoria, oltre a spiegare tutti i fatti spiegati dal concetto classico, colma diversi punti deboli della vecchia Teoria, appare a questa superiore, e, quindi, più vera.

Il mondo antico fondava le sue nozioni scientifiche sulla pura teoria. Galilei fonda la scienza moderna « provando e riprovando ». La scienza, tuttavia, si sviluppa grazie ad un processo dialettico della mente dell'uomo, che pone alternativamente l'accento ora sul fatto ora sulla teoria, superando discordanze ed antitesi, per edificare un corpo coerente ed armonico di dottrina, che gli consenta, nel campo pratico, di allargare le frontiere del suo dominio sulla natura, e, nel campo teorico, di percorrere nuove vie per un maggiore approfondimento dell'aspetto filosofico della realtà.

La storia della scienza degli ultimi trecento anni è caratterizzata, nel suo sviluppo, da una successione cronologica e pressochè organica,

che non trova un parallelo nella scienza greca. La storia della fisica da Galilei ad oggi ci fa constatare come la scienza progredisca, mediante approssimazioni, diciamo così, concentriche: ogni teoria contiene, infatti, quella che l'ha preceduta come « caso particolare ». La Teoria di Newton è un caso particolare della Teoria della Relatività Ristretta, la Relatività Ristretta è un caso particolare della Relatività Generale, la Relatività Generale è un caso particolare della Teoria Endosferica. Fra le varie Teorie vi sono differenze qualitative e quantitative. Per esempio, lo spazio, assoluto nella Teoria di Newton, non lo è nella Relatività Ristretta (differenza qualitativa). Lo spazio-tempo, assoluto nella Relatività Ristretta, non lo è nella Relatività Generale; la propagazione della luce, rettilinea nello spazio uniforme della Teoria di Newton e nella Relatività Ristretta, non lo è nella Relatività Generale; i moti, rigidi nella Teoria di Newton e nella Relatività Ristretta, non lo sono nella Relatività Generale (differenze qualitative). Fra la Teoria della Relatività Generale e la Teoria Endosferica non vi sono differenze qualitative, ma solo quantitative: entrambi gli spazi sono curvi, con la differenza *quantitativa* che le curvature sono assai più accentuate nella seconda delle due Teorie; la propagazione della luce non è rettilinea in nessuna delle due Teorie, con la differenza *quantitativa* che le flessioni sono molto più sensibili nella Teoria Endosferica; in tutte e due le Teorie i moti non sono rigidi, ma, mentre nella Teoria della Relatività Generale le deformazioni sono trascurabili, nella nuova Teoria sono, invece, molto considerevoli. Dal punto di vista qualitativo la Teoria Endosferica non differisce dalla Teoria della Relatività Generale, mentre ne differiscono notevolmente le precedenti Teorie di Newton e della Relatività Ristretta. La nuova concezione del mondo non introduce nessuna ipotesi essenzialmente nuova, nessun principio o concetto fisico nuovo, ma si fonda integralmente su ipotesi, principî e concetti fisici già universalmente ammessi, sugli stessi fatti ed esperimenti su cui è costruita la cosmogonia classica: si tratta di un ulteriore passo innanzi, nel cammino della scienza, « dovuto a nuovi ed originali modi di pensare su esperimenti e fenomeni noti da tempo ».

I recentissimi esperimenti spaziali non costituiscono esperimenti cruciali atti a discriminare fra le due Teorie: essi, tuttavia, sono affermazioni sperimentali del più alto interesse. Secondo tali esperimenti « lo spazio cosmico non è realmente vuoto come si credeva fino ad ora ». La scienza astronomica sembra si avvii ad indicarci, sul piano sperimentale, la vera immagine fisica dell'universo.

In luogo della « vuota » estensione, della dissipazione e della dispersione, insite nel sistema classico, si ha, nel nuovo concetto, la conservazione, la concentrazione e la potenza. La nuova idea del mondo suggerisce idee di collaborazione, di solidarietà, accrescendo negli uomini la fiducia in quei valori. Il nuovo mondo affaccia l'idea di un mondo nuovo.

BIBLIOGRAFIA

1) Ageno Mario – Problemi di Fisica. Libreria Veschi – Roma 1948.

2) Albergamo Francesco – *a*) Introduzione a « La scienza e l'ipotesi » di H. Poincaré. Ed. La Nuova Italia – Firenze, 1949 ; *b*) Introduzione a « Il valore della scienza » di H. Poincaré. Ed. La Nuova Italia – Firenze, 1952 ; *c*) Introduzione alla logica della scienza. Ed. La Nuova Italia – Firenze, 1956; *d*) Le basi teoretiche della Fisica nuova. Ed. C.E.D.A.M. – Padova, 1940 ; *e*) « Matematica e realtà » dalla rivista « Società » n. 2, 1956, pp. 317-325.

3) Alfven Hames – L'elettricità nello spazio, in «Le ultime scoperte astronomiche» Ed. Martello – Milano, 1956.

4) Aliotta Antonio – Valore filosofico della teoria di Einstein, in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria, Firenze, 2ª ediz. 1955.

5) Amaldi Edoardo – Fisica sperimentale. Vol. II, 2ª ediz. Ed. Pioda – Roma, 1940.

6) Amaldi Ugo – Vedasi Levi-Civita Tullio.

7) Amico-Roxas Paolo Emilio – Compendio di Meccanica Razionale e Problemi di Statica Grafica. 2ª ediz. Libreria Politecnica – Roma, 1950.

8) Anger Pierre – Discussione sulla fisica moderna. Ed. Einaudi, Boringhieri, – Torino, 1959.

9) Armellini Giuseppe – *a*) Astronomia siderale. Vol. I, 1928 ; Vol. II, 1931 ; Vol. III, 1936. Ed. Zanichelli ; *b*) I fondamenti scientifici dell'astronomia. Ed. Hoepli, 1947 ; *c*) Astronomia e Geodesia. Ed. Bompiani, 1941 ; *d*) « La Teoria della Relatività nell'astronomia moderna » in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria, Firenze, 2ª ediz., 1955; *e*) Lezioni di Meccanica Razionale. Ed. Hoepli, 1945.

10) Baker Robert H. Ph. D. – « Stelle ». Collana « I miracoli della Natura ». Editore Aldo Martello – Milano, 1957.

11) Beer Sergio – L'atomo e la bomba atomica. Ed. Salani – Firenze, 1949.

12) Bernardini Gilberto – Fisica sperimentale. Vol. I, 2ª ediz. Ed. Pioda – Roma, 1940.

13) Bok Bart F. – La Via Lattea, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

14) BOMPIANI ENRICO – Geometria descrittiva. Vol. I. Lezioni. Ed. Pioda, – Roma, 1942.

15) BORN MAX – Discussione sulla Fisica moderna. Ed. Einaudi, Boringhieri – 1959.

16) BRIDGMAN PERCY WILLIAMS – La logica della Fisica moderna. Ed. Einaudi, 1957.

17) BRUNETTI RITA – L'atomo e le sue radiazioni. Ed. Zanichelli, 1932.

18) CALDIROLA PIERO – Verifiche sperimentali e applicazioni della Relatività, in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria, Firenze, 2ª ediz. 1955.

19) CARLSON PAOLO – La Fisica moderna. Ed. Hoepli, 1940.

20) CASTELFRANCHI GAETANO – Fisica moderna. Ed. Hoepli, 1940.

21) CASTELNUOVO GUIDO – a) Lezioni di Geometria analitica. IX ediz. Ed. Dante Alighieri, 1938 ; b) La relatività del tempo e il campo gravitazionale nella teoria einsteiniana. Complementi in « I fondamenti della Relatività einsteiniana » di A. Kopff. Ed. Hoepli, 1923.

22) CIPOLLA MICHELE – « La matematica elementare nei suoi fondamenti ». Ed. Fratelli Vena, Palermo, 1936.

23) COLEMAN JAMES A. – « La relatività è facile ». Ed. Feltrinelli, 1957.

24) CONFORTO FABIO – Le superficie razionali. Ed. Zanichelli, 1939.

25) C. W. W. – La Relatività e il Signor Robinson. Ed. Bompiani, 1943.

26) DE BROGLIE LOUIS – a) I quanti e la Fisica moderna. Ed. Einaudi, 1941 ; b) Materia e luce. Ed. Bompiani, 1942.

27) DEUTSCH ARMIN I. – Il Sole, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

28) DE VAUCOULEURS GERARD – « La Supergalassia », « Marte », in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

29) EDDINGTON SIR ARTHUR – a) L'universo in espansione. Ed. Zanichelli, 1934 ; b) Luci dall'infinito, Ed. Hoepli, 1934.

30) EINSTEIN ALBERT – a) Il significato della Relatività. Ed. Einaudi, 1950 ; b) L'evoluzione della Fisica. Ed. Einaudi, 1948; c) Le memorie fondamentali (1905, 1916, 1917, 1953) in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria, Firenze, 2ª ediz. 1955 ; d) Idee e opinioni. Ed. Schwarz, 1957 ; e) Come io vedo il mondo. Ed. Giachini – Milano, 1952 ; f) Sulla teoria speciale e generale della Relatività. Ed. Zanichelli, 1921.

31) ENGELS FRIEDRICH – Dialettica della natura. Ed. Rinascita – Roma, 1950.

32) ENRIQUES FEDERICO – a) Spazio e tempo davanti alla critica moderna, in « Questioni riguardanti le Matematiche elementari ». Vol. II, parte I. Ed. Zanichelli,

1925; b) Problemi della scienza. 2ª ediz. Ed. Zanichelli, 1925; c) Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri I – IV – Ed. Alberto Stock – Roma, 1925; d) Le Matematiche nella storia e nella cultura. Ed. Zanichelli, 1938; e) Compendio di Storia del pensiero scientifico. Ed. Zanichelli, 1937; f) Storia del pensiero scientifico. Vol. I, «Il mondo antico». Ed. Zanichelli, 1932.

33) EWEN HAROLD J. – Le radio onde dallo spazio interstellare, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956.

34) FANO GINO – Geometria non euclidea. Ed. Zanichelli, 1935.

35) FINZI BRUNO – a) Calcolo tensoriale e applicazioni (con Pastori Maria). Ed. Zanichelli, 1951; b) Relatività generale e teorie unitarie, in «Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955». Editrice Universitaria – Firenze, 2ª ediz. 1955; c) Teoria dei campi. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini – Milano, 1958.

36) GALILEO GALILEI – Dialogo sopra i due massimi Sistemi. Frammenti e lettere. R. Giusti Editore – Livorno, 1925.

36 bis) GAMOW GEORGE – a) Cosmologia moderna e turbolenza nello spazio, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956; b) L'Universo in evoluzione, in «L'Universo». Ed. Martello – Milano, 1959.

37) GIALANELLA LUCIO – Teoria della Relatività. Enciclopedia Treccani, vol. XXIX.

38) GIORGI GIOVANNI – Sui fondamenti della Geometria, da «Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi», vol. III, parte 2ª. Ed. Hoepli, 1950.

39) GRAY GEORGE W. – Un universo più grande e più vecchio, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956.

40) HEGEL GIORGIO GUGLIELMO FEDERICO – a) Enciclopedia delle scienze filosofiche. 3ª ediz. Ed. Laterza – Bari, 1951; b) La scienza della logica. vol. I, II, III. Ed. Laterza – Bari, 1925.

41) HEISENBERG WERNER – Discussione sulla Fisica moderna. Ed. Einaudi, Boringhieri – Torino, 1959.

42) HOYLE FRED – a) Stelle ad altissima temperatura, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano 1956; b) L'Universo statico. in «L'Universo». Ed. Martello – Milano, 1959; c) La natura dell'Universo. Ed. Bompiani – Milano, 1953.

43) INFELD LEOPOLD – L'evoluzione della Fisica. Ed. Einaudi, 1948.

44) JASTROW JOSEPH – Storia dell'errore umano. Ed. Mondadori, 1942.

45) KAHN FRITZ – Il grande libro della natura. Ed. Hoepli, 1954.

46) KANT EMMANUELE – a) Critica della Ragion pura. Ed. Laterza – Bari, 1910; b) Critica della Ragion pratica. Ed. Laterza – Bari, 1909; c) Critica del Giudizio. Ed. Laterza – Bari, 1907.

47) KHINCIN A. IA. – «Il metodo delle funzioni arbitrarie e la lotta contro l'idealismo, ecc.», ne «La nuova critica». 1º Quaderno. Ed. Vallecchi, 1955.

48) KOPFF AUGUSTO – I fondamenti della Relatività einsteiniana. Ed. Hoepli, 1923.

49) LÄMMEL RODOLFO – I fondamenti della Teoria della Relatività. Ed. Zanichelli, 1923.

50) LE CORBEILLER PHILIPPE – La curvatura dello spazio, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

51) LEVI-CIVITA TULLIO – *a*) Lezioni di Meccanica Razionale (con Amaldi Ugo), vol. I, 1923 ; vol. II, parte I, 1926; vol. II, parte II, 1927. Ed. Zanichelli; *b*) Questioni di Meccanica classica e relativista. Ed. Zanichelli, 1924; *c*) Fondamenti di Meccanica relativistica. Ed. Zanichelli, 1928 ; *d*) Su la determinazione sperimentale dei coefficienti di un ds^2 einsteiniano. Complementi in « I fondamenti della Relatività einsteiniana » di A. Kopff. Ed. Hoepli, 1923.

52) LOBACEVSKIJ NICOLAJ IVANOVIC – Nuovi principi della geometria. Ed. Einaudi, 1955.

53) LOCKYER J. NORMAN – Astronomia. Ed. Hoepli, 1925.

54) LOVELL A.B.C. – Radiostelle, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956.

55) MAFFI PIETRO – Nei cieli. S.E.I. – Torino, 1933.

56) MAJORANA QUIRINO – *a*) « L'inerzia non appare sempre proporzionale al peso », Rend. Lincei, serie VIII, vol. XVI, fasc. 5, maggio, 1954. ; *b*) « Su di un'ipotesi cosmogonica », Rend. Lincei, serie VIII, vol. XVII, fasc. 5, novembre 1954 ; *c*) « Su di una nuova teoria della gravitazione », Rend. Lincei, vol. XIX, fasc. 3-4, settembre-ottobre 1955 ; *d*) « Sul significato, non einsteiniano, della relatività fisica », Rend. Lincei, serie VIII, vol. XXI, 1956.

57) MARSHAK ROBERT – L'energia delle stelle, in «Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

58) MILLIKAN ROBERT ANDREW – I raggi cosmici. Ed. Einaudi, 1941.

59) MORGAN W.W. – La struttura spirale della Galassia, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

60) MURANI ORESTE – Fisica. Ed. Hoepli, 1927.

61) NAAN G. J. – Il principio di relatività in fisica, ne «La nuova critica», 1° Quaderno. Ed. Vallecchi, 1955.

62) NEWTON ISAAC – *a*) Principi di filosofia naturale. Ed. Alberto Stock – Roma, 1925 ; *b*) Sistema del mondo. Ed. Boringhieri – Torino, 1959.

63) OMELIANOVSKI M. E. – Il principio della complementarità di Bohr, ecc., ne « La nuova critica ». 1° Quaderno. Ed. Vallecchi, 1955.

64) OPARIN ALEKSANDR J. – L'origine della vita sulla Terra. Ed. Einaudi, 1956.

65) OVCINNIKOV N. F. – I concetti di massa e di energia nella Fisica attuale, ecc., ne « La nuova critica ». 1° Quaderno. Ed. Vallecchi, 1955.

66) Palatini Attilio – « Teoria della Relatività », nella Enciclopedia delle Matematiche elementari. vol. III, parte I. Ed. Hoepli, 1947.

67) Pantaleo Mario – Introduzione generale, in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria, – Firenze, 2ª ediz. 1955.

68) Papp Desiderius – a) Avvenire e fine del mondo. Ed. Bompiani, 1941; b) Chi vive sulle stelle? Ed. Bompiani, 1942.

69) Pastori Maria : Vedasi Finzi Bruno.

70) Payne Gaposchkin Cecilia – L'evoluzione delle Galassie, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello – Milano, 1956.

71) Persico Enrico – a) Introduzione alla Fisica Matematica. Ed. Zanichelli, 1941; b) Fondamenti della Meccanica Atomica. Ed. Zanichelli, 1940; c) Ottica. Ed. Vallardi, 1932.

72) Perucca Eligio – Fisica generale e sperimentale. vol. I, 1941; vol. II, 1942. Ed. U.T.E.T.

73) Planck Max – La conoscenza del mondo fisico. Ed. Einaudi, 1942.

74) Poincaré Enrico – a) La scienza e l'ipotesi. Ed. La Nuova Italia, – Firenze, 1949; b) Il valore della scienza. Ed. La Nuova Italia – Firenze, 1952.

75) Polara V. – Fisica sperimentale (con Tieri L.). Ed. Perrella – Roma, 1947.

76) Polvani Giovanni – Il moto della Terra, filo storico della Relatività, in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria – Firenze, 2ª ediz. 1955.

77) Porro Francesco – Trattato di Astronomia. Vol. I, Ed. Zanichelli, 1922.

78) Ranzoli Cesare – Dizionario di scienze filosofiche. Ed. Hoepli – Milano, 1952.

79) Russel Henry Norris – Il sistema solare e la sua origine. Ed. A. Mondadori, 1941.

80) Sambursky S. – Il mondo fisico dei Greci. Ed. Feltrinelli – Milano, 1959.

81) Santage Allan R. – Lo spostamento verso il rosso, in «L'Universo ». Ed. Martello – Milano, 1959.

82) Schrödinger Erwin – Discussione sulla Fisica moderna. Ed. Einaudi, Boringhieri – Torino, 1959.

83) Severi Francesco – Aspetti matematici dei legami tra Relatività e senso comune, in « Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955 ». Editrice Universitaria – Firenze, 2ª ediz. 1955.

84) Stebbins Foel – La Fotometria per mezzo della cellula fotoelettrica, in « Le ultime scoperte astronomiche ». Ed. Martello, – Milano, 1956.

85) STRANEO PAOLO – a) Genesi ed evoluzione della concezione relativistica di Einstein, in «Cinquant'anni di Relatività, 1905-1955». Editrice Universitaria – Firenze, 2ª ediz., 1955; b) Situazione e portata delle concezioni relativistiche nella Fisica e nella Cosmologia attuali. Rivista «Archimede», anno IX, n. 6, 1957. Ed. Le Monnier – Firenze; c) La Teoria della Relatività Generale e l'attuale cosmogonia. Rivista «Archimede», anno X, n. 2-3, 1958. Ed. Le Monnier – Firenze.

86) STRUVE OTTO – L'evoluzione delle stelle, in «Le ultime scoperte astronomiche», Ed. Martello – Milano, 1956.

87) TIERI L. – Vedasi Polara V.

88) TONINI VALERIO – a) Relatività strutturale. Rend. Facoltà di Scienze di Cagliari, 4º vol. XVII, 1947; b) Fondamenti metodologici della Relatività strutturale. Ed. Centro Romano di Comparazione e Sintesi, 1950. c) Il realismo in Fisica, ecc., ne «La nuova critica». 1º Quaderno. Ed. Vallecchi, 1955; d) Epistemologia della Fisica moderna. Ed. Fratelli Bocca, 1953.

89) VERCELLI FRANCESCO – L'aria. Ed. U.T.E.T. – Torino, 1952.

90) VERONESE GIUSEPPE – Il vero nella Matematica. Discorso inaugurale 1905-06 nell'Aula Magna dell'Università di Padova – Roma, 1906.

91) VILLA MARIO – Repertorio di Matematiche. Ed. CEDAM, – Padova, 1951.

92) WATSON FLETCHER G. – Le Meteore, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956.

93) WHIPPLE FRED. L. – L'ipotesi della nube di polvere. Le comete, in «Le ultime scoperte astronomiche». Ed. Martello – Milano, 1956.

94) YOUNG JOHN WESLEY – «Fundamental Principles of Algebra and Geometry», Università di Kansas (U.S.A.).

95) ZIM HERBERT S. PH. D. – «Stelle». Collana «I miracoli della Natura». Ed. Martello – Milano, 1957.

INDICE DEI NOMI CITATI

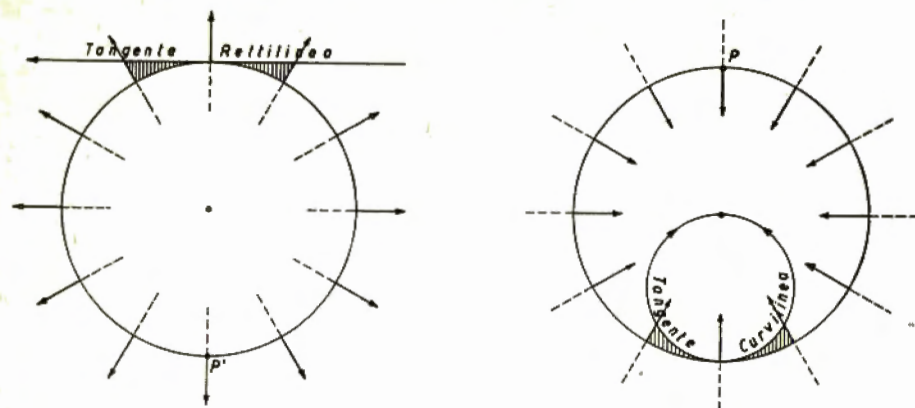
Ai nomi seguono i numeri delle pagine della prefazione e del testo

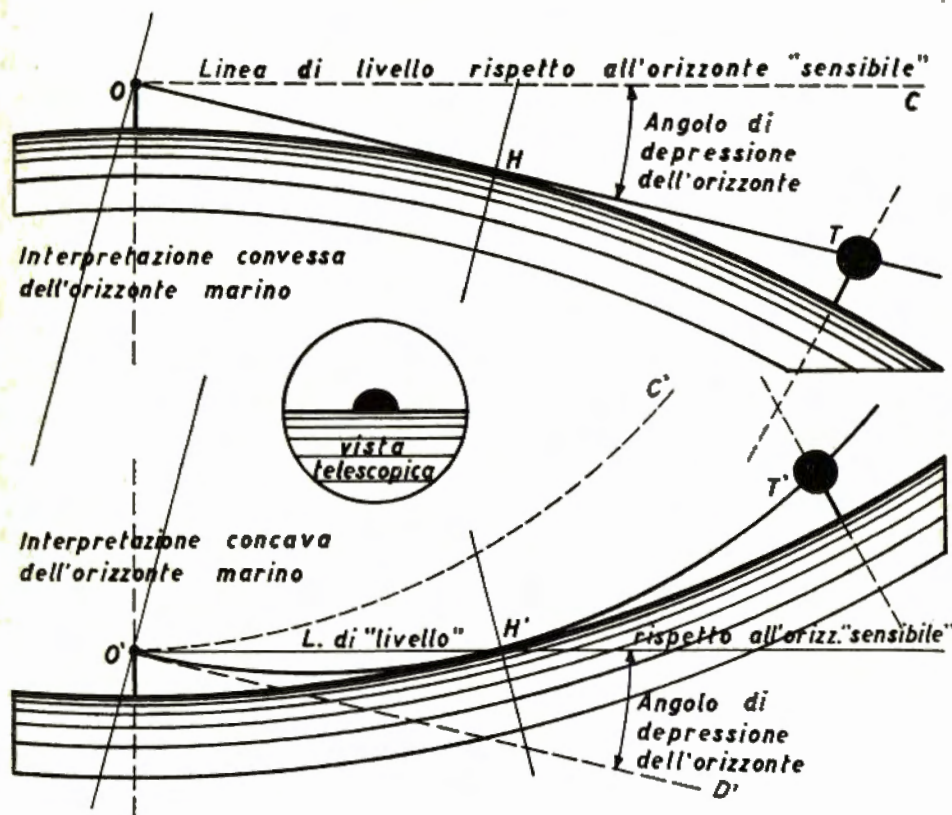
INDICE ANALITICO

Alle voci seguono i numeri delle pagine della prefazione e del testo

TAVOLE

La Tangente Rettilinea esosferica e la Tangente Curvilinea endosferica.

(leggasi nelle pagg. 240 e 247)

Le « prove » della forma della Terra.

(leggasi a pag. 244)

Le due interpretazioni e le due "prove".

Campo elettrico e campo magnetico.

(leggasi nelle pagg. 250 e 263)

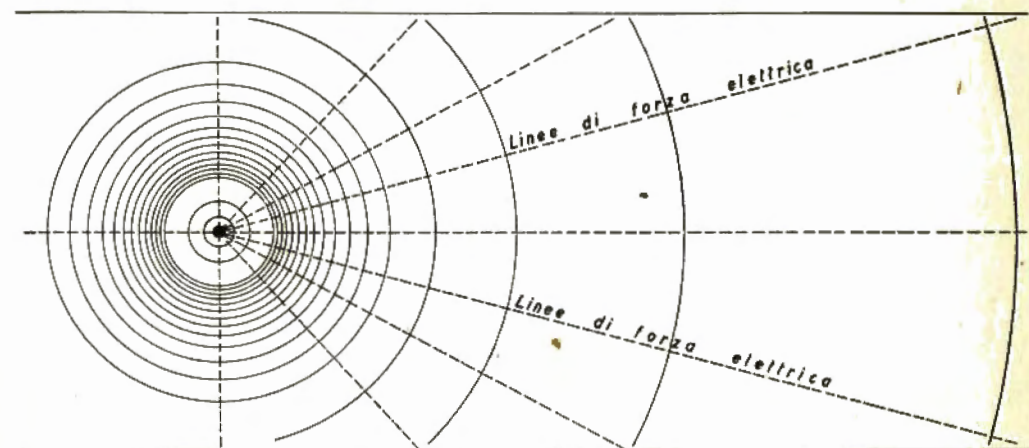



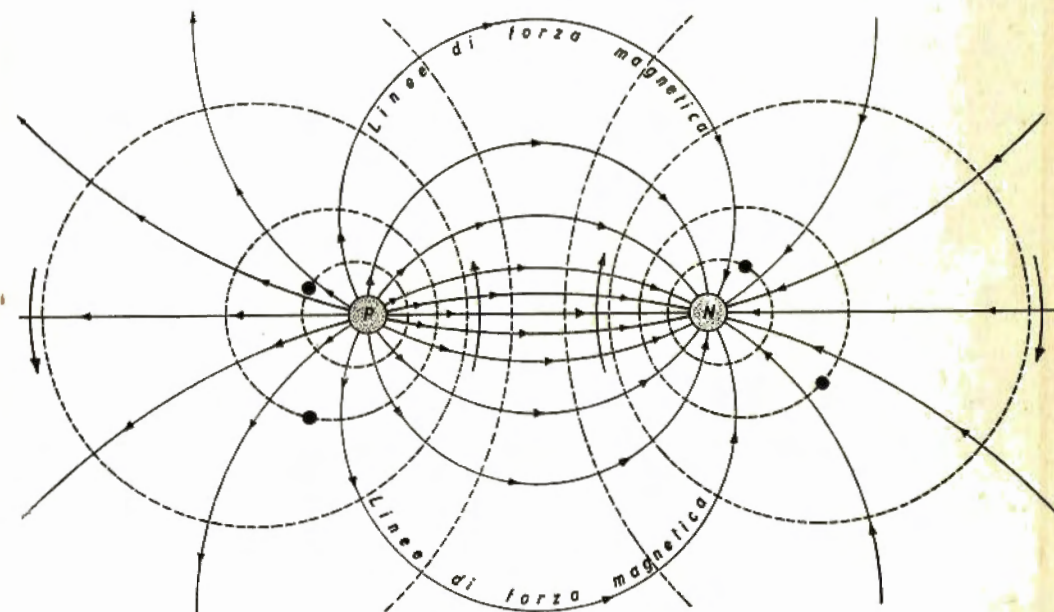
Fig. sup.: Carica elettrica, campo elettrico e superficie equipotenziali.

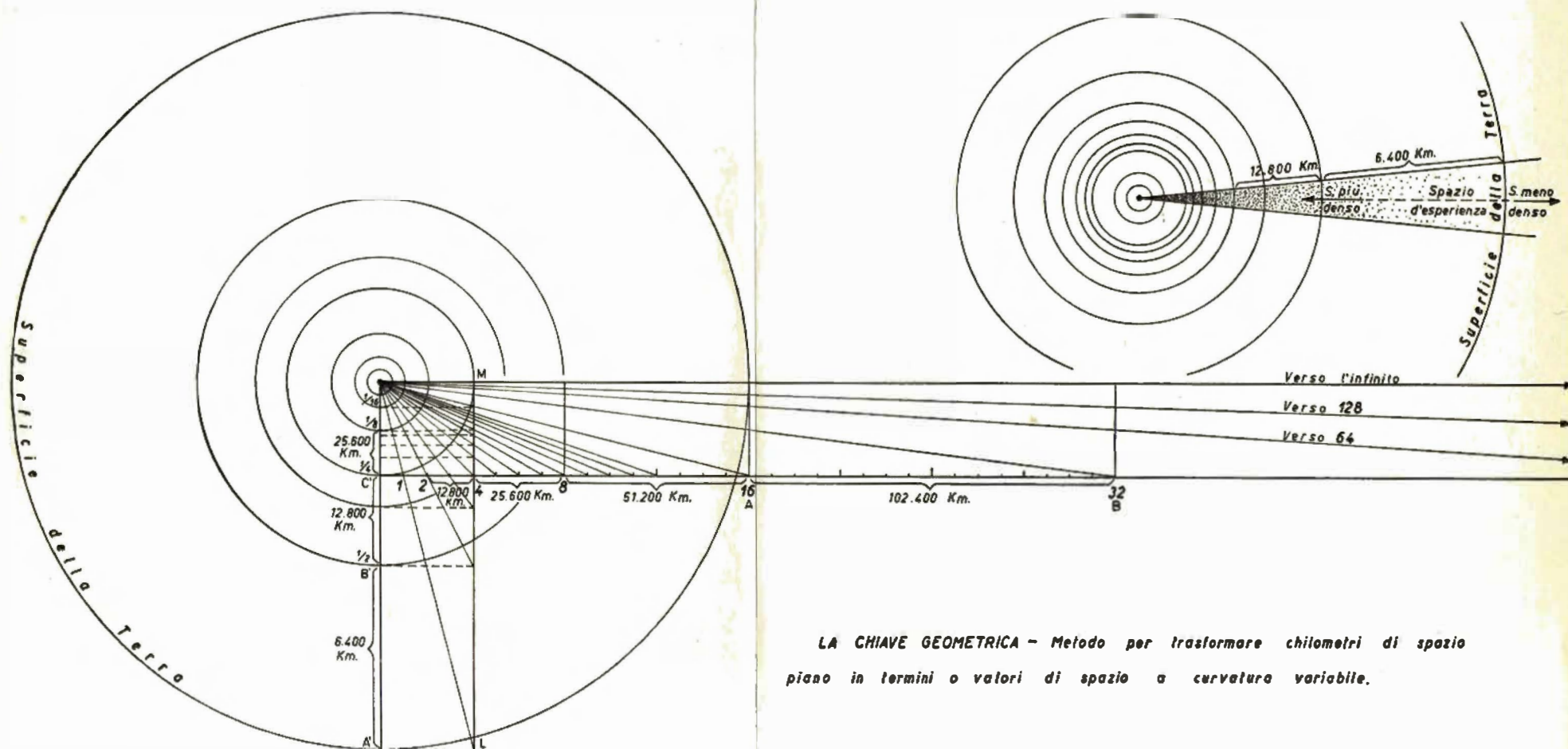
Fig. inf.: Poli magnetici, campo magnetico e superficie equipotenziali.

Procedimento di inversione.

(leggasi a pag. 240)

Metodi per trovare le posizioni inverse e i centri degli archi dei raggi solari.

(leggasi nelle pagg. 247-8)

Spazio geometrico e spazio fisico - Geometria euclidea e geometria non euclidea.

(leggasi nelle pagg. 248, 249 e 293)

LA CHIAVE GEOMETRICA — Metodo per trasformare chilometri di spazio piano in termini o valori di spazio a curvatura variabile.

I due spazi.

Alle tangenti rettilinee *ab*, *bc*, *cd* dello spazio euclideo (fig. inf.) corrispondono le tangenti curvilinee *ab*, *bc*, *cd* dello spazio non euclideo a curvatura variabile (fig. sup.); alle parallele rettilinee euclidee corrispondono le parallele curvilinee non euclidee; gli angoli, sotto cui s'intersecano le linee euclidee e le corrispondenti linee non euclidee, sono uguali.

(leggasi nelle pagg. 242, 243 e 250)

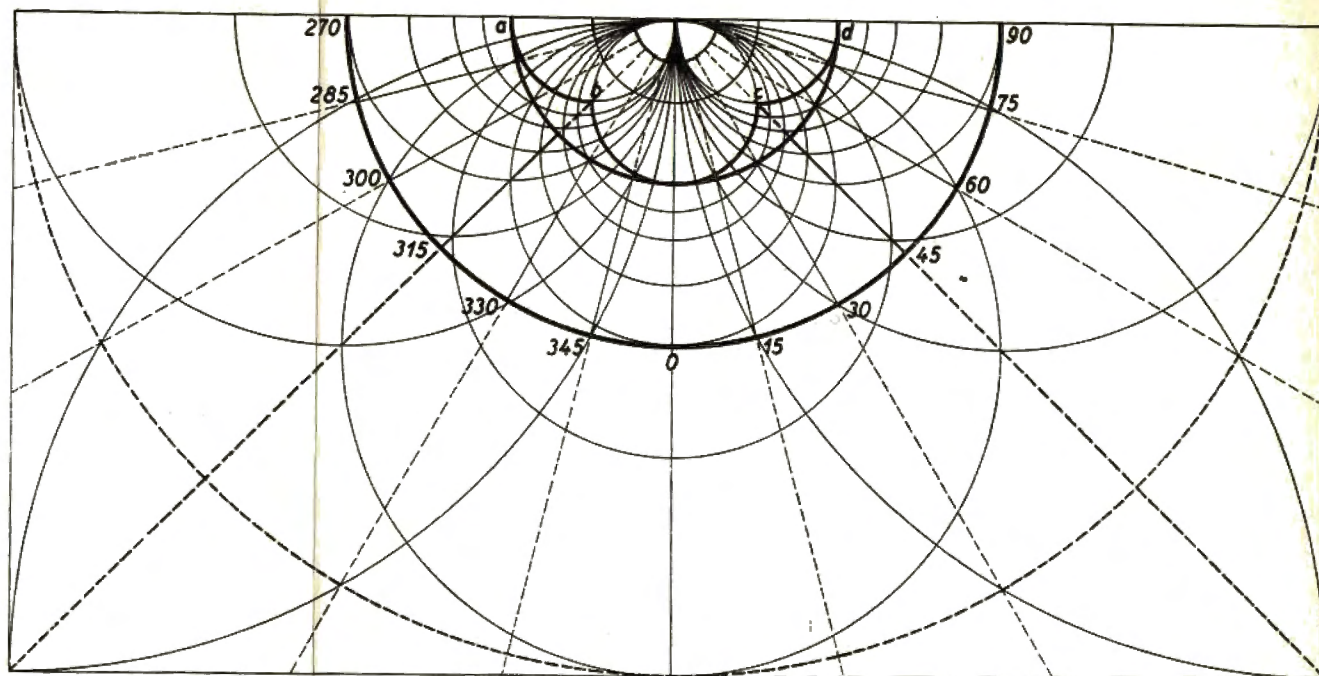
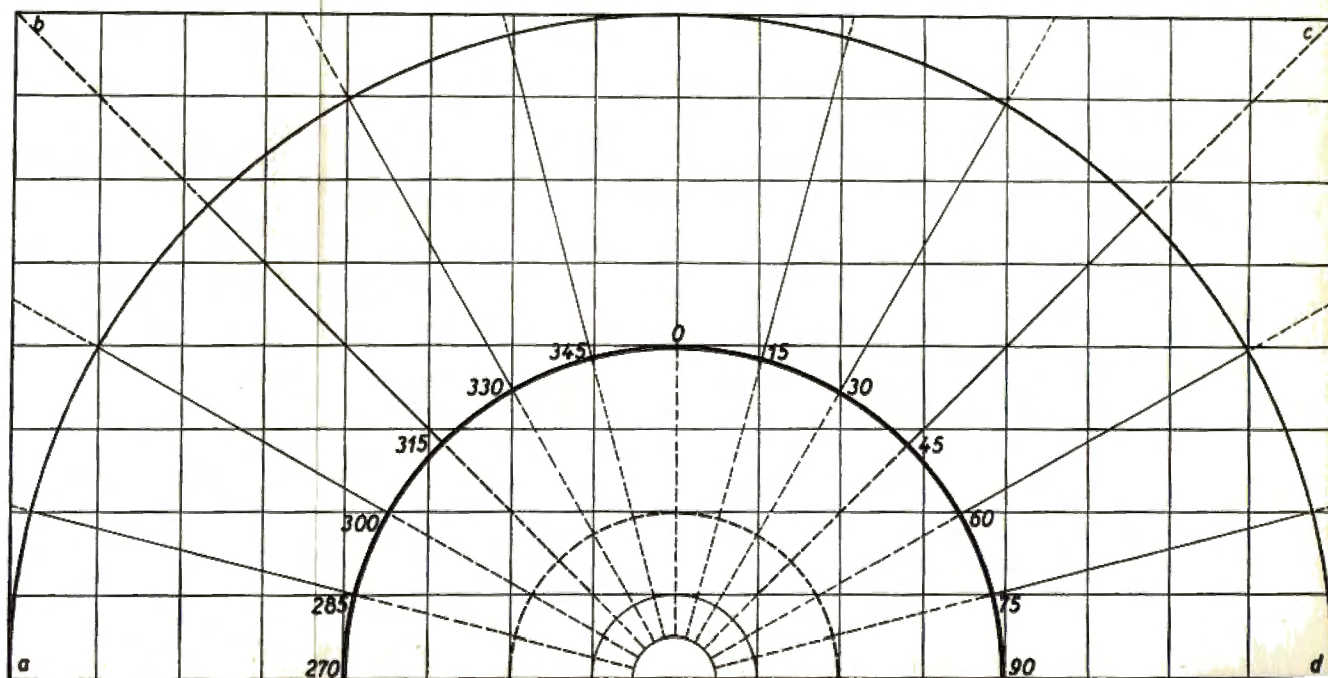
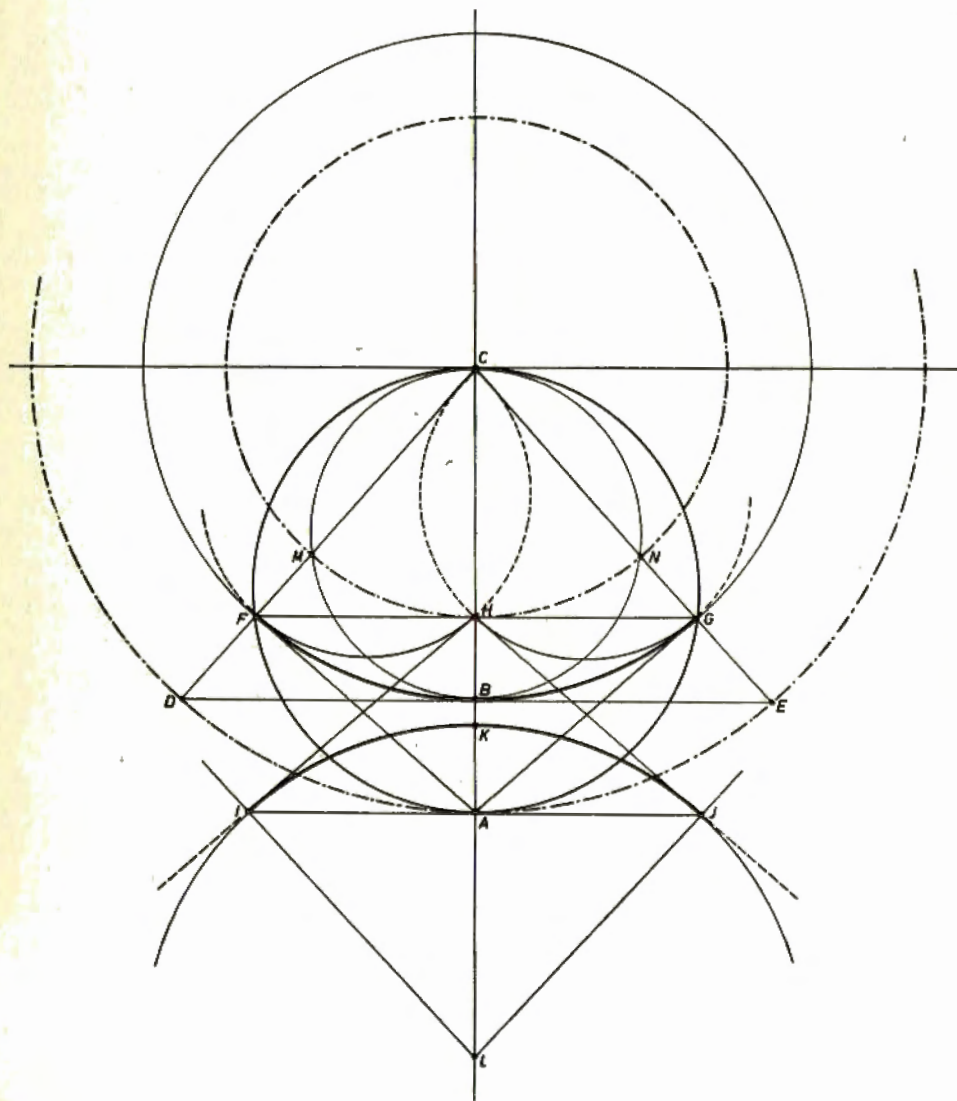
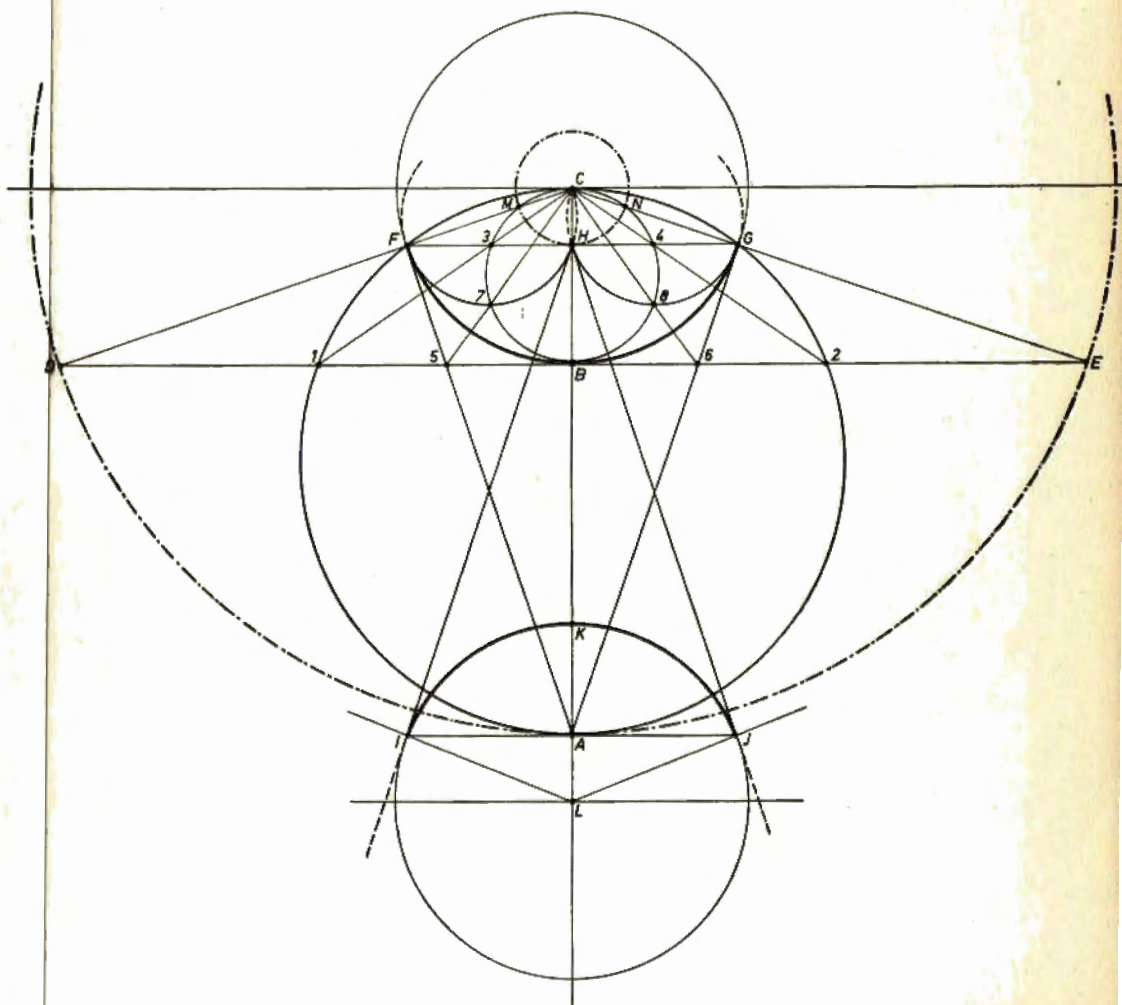



Fig. sup.: Spazio a curvatura variabile — Geometria non Euclidea

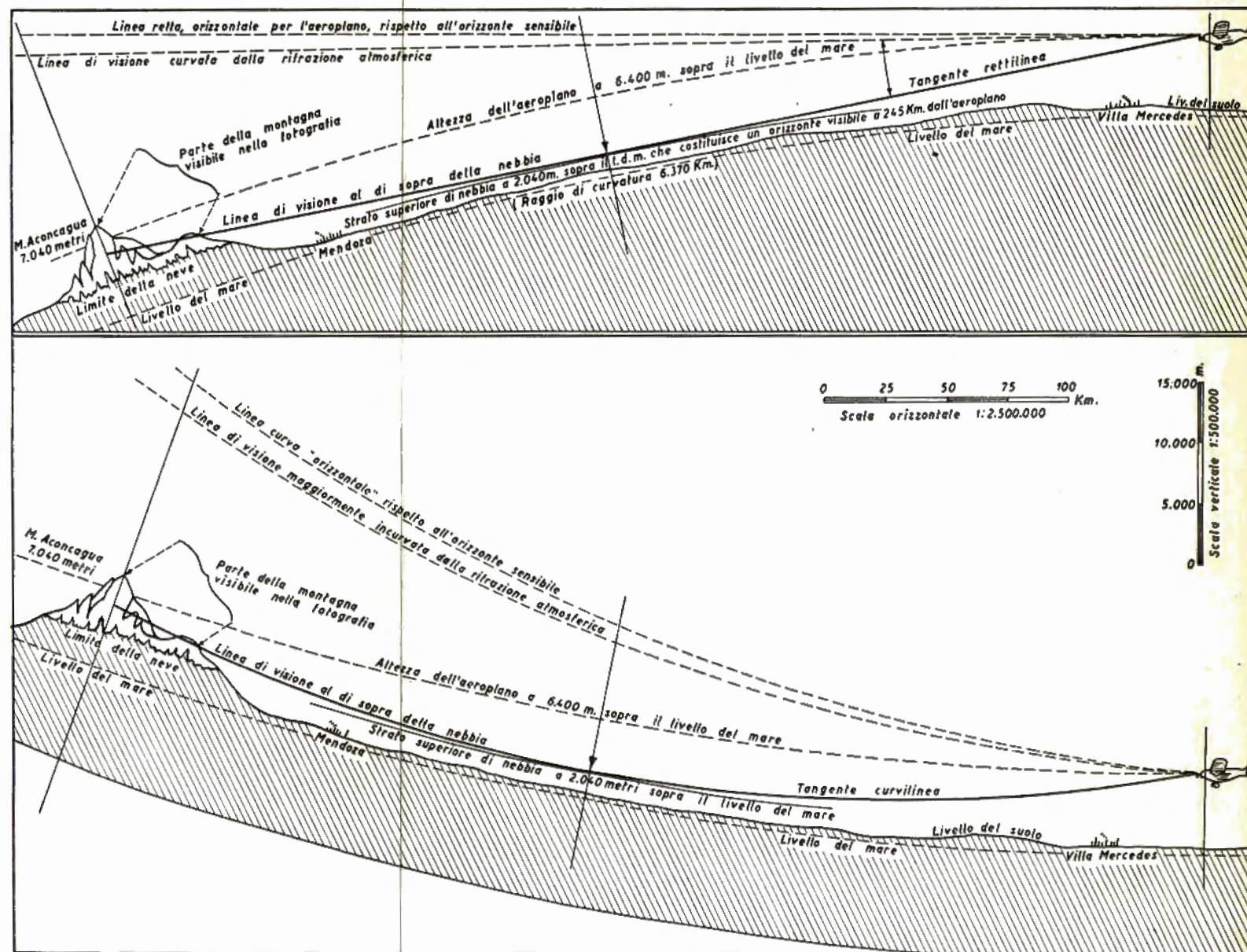
Fig. inf.: Spazio piano, uniforme — Geometria Euclidea

Perchè la Terra concava appare convessa.

(leggasi a pag. 289)

Come apparirebbe la Terra concava vista dalla Luna o dal Sole.

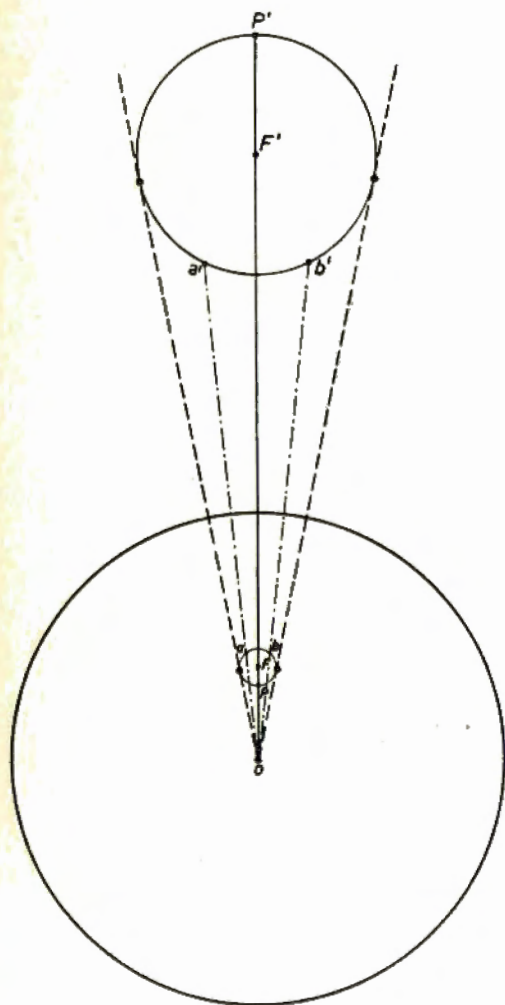
(leggasi a pag. 290)

Fotografia infrarossa del Monte Aconcagua.

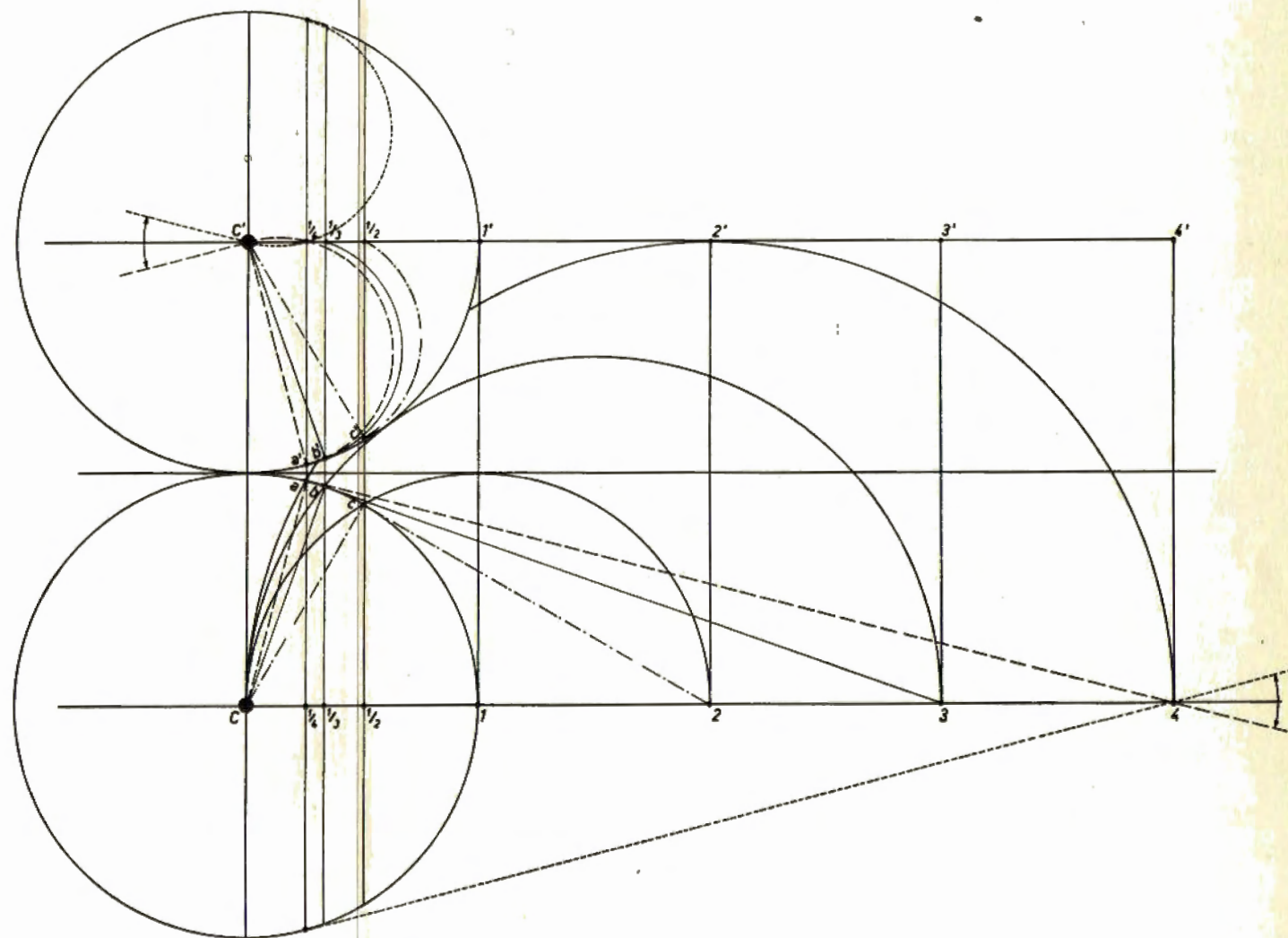
Ammettendo l'ipotesi della propagazione *rettilinea* delle onde elettromagnetiche la fotografia *prova* la convessità della Terra.

Ammettendo l'ipotesi della propagazione *curvilinea* delle onde elettromagnetiche la fotografia *prova* la concavità della Terra.

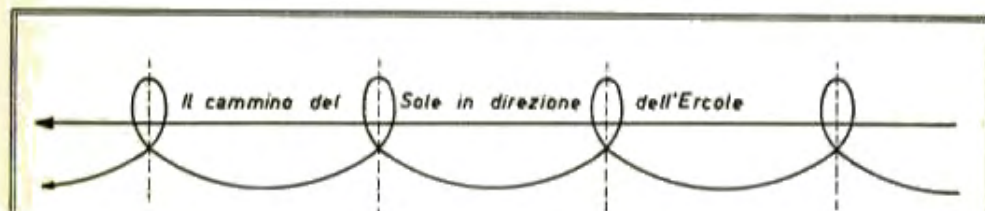
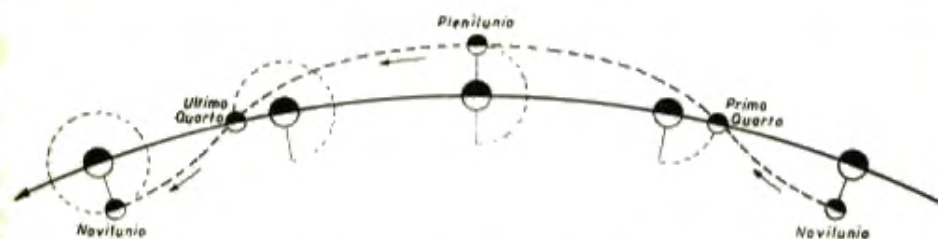
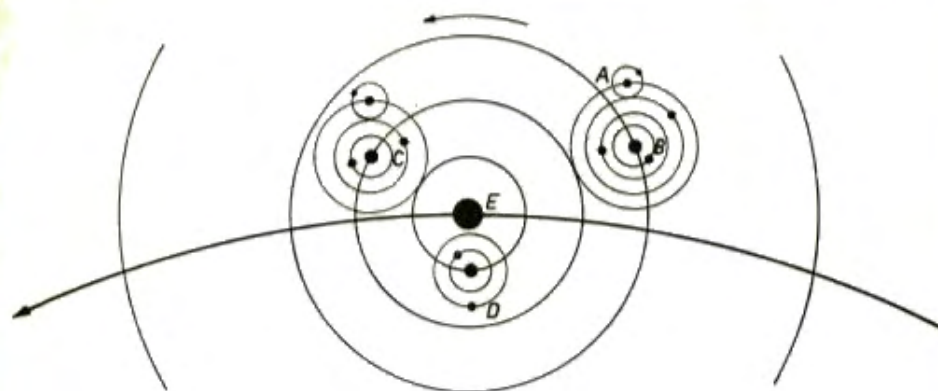
(leggasi nelle pagg. 245 e 291)

Una fotografia infrarossa del Monte Aconcagua fu scattata nel 1931 da un aeroplano ad una distanza di 460 chilometri: le due interpretazioni, convessa (fig. sup.) e concava (fig. inf.).

Inversione di figure.

(leggasi a pag. 261)

Il problema delle parallassi.

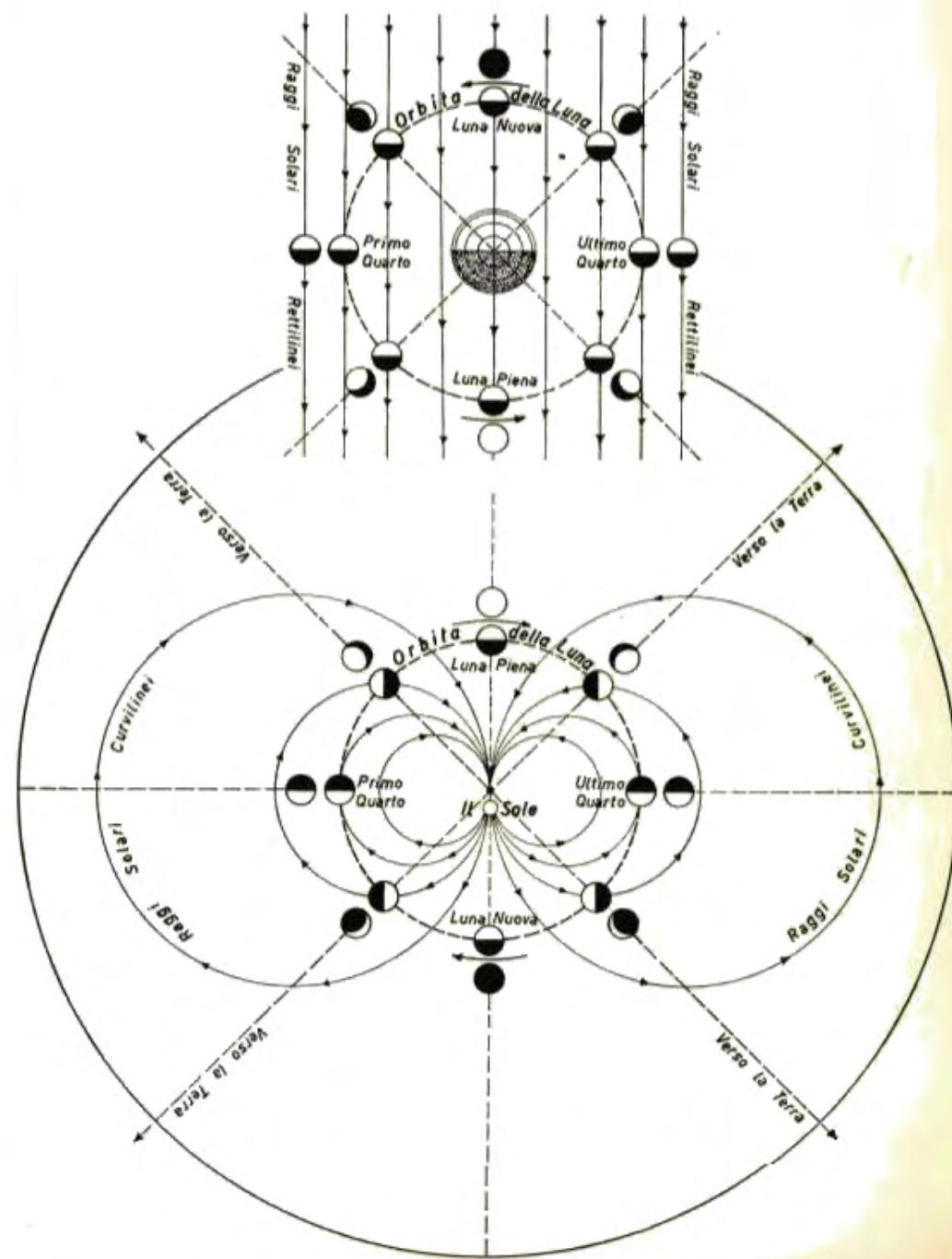
(leggasi a pag. 287)

La legge di Newton applicata allo spazio esosferico euclideo.

(leggasi nelle pagg. 103 e 207)

I moti degli astri nel sistema classico

Il cammino elicoidale o spirale della Terra rispetto alle stelle fisse

Il moto della Luna rispetto al Sole

I sistemi solari, per la teoria della gravitazione, devono girare attorno ad altri Soli, più grandi e a distanze sempre maggiori, rendendo in definitiva impossibile un centro dell'Universo

Le fasi lunari nei due Sistemi.

(leggasi a pag. 283)

Raggi Solari Rettilinei
Orbita della Luna
Luna Nuova
Primo Quarto
Ultimo Quarto
Luna Piena
Raggi Solari Rettilinei
Verso la Terra
Verso la Terra
Curvilinei
Curvilinei
Orbita della Luna
Luna Piena
Primo Quarto
Il Sole
Ultimo Quarto
Luna Nuova
Raggi Solari
Raggi Solari
Verso la Terra
Verso la Terra

Le linee attrattive nei due Sistemi.

(leggasi a pag. 269)

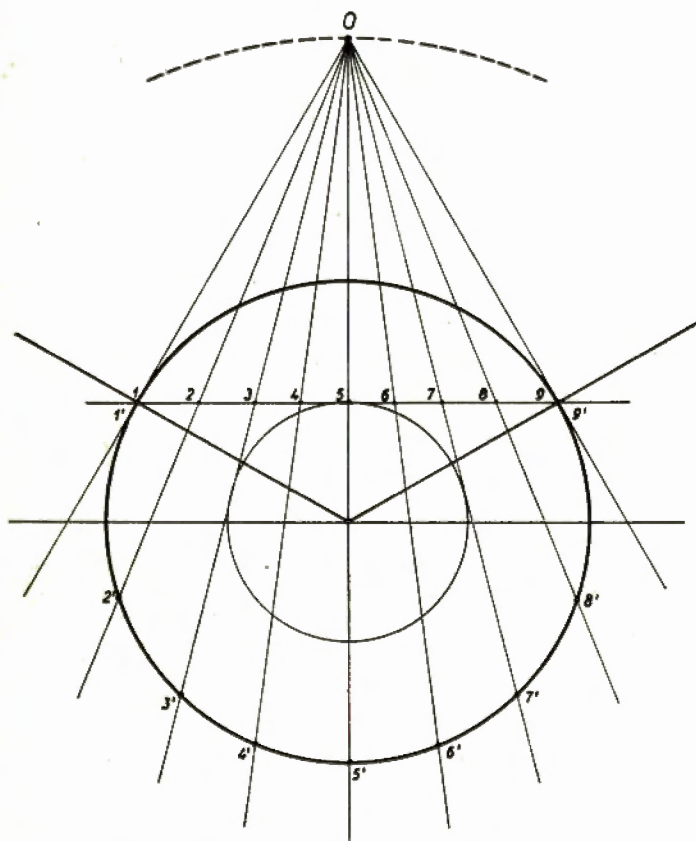
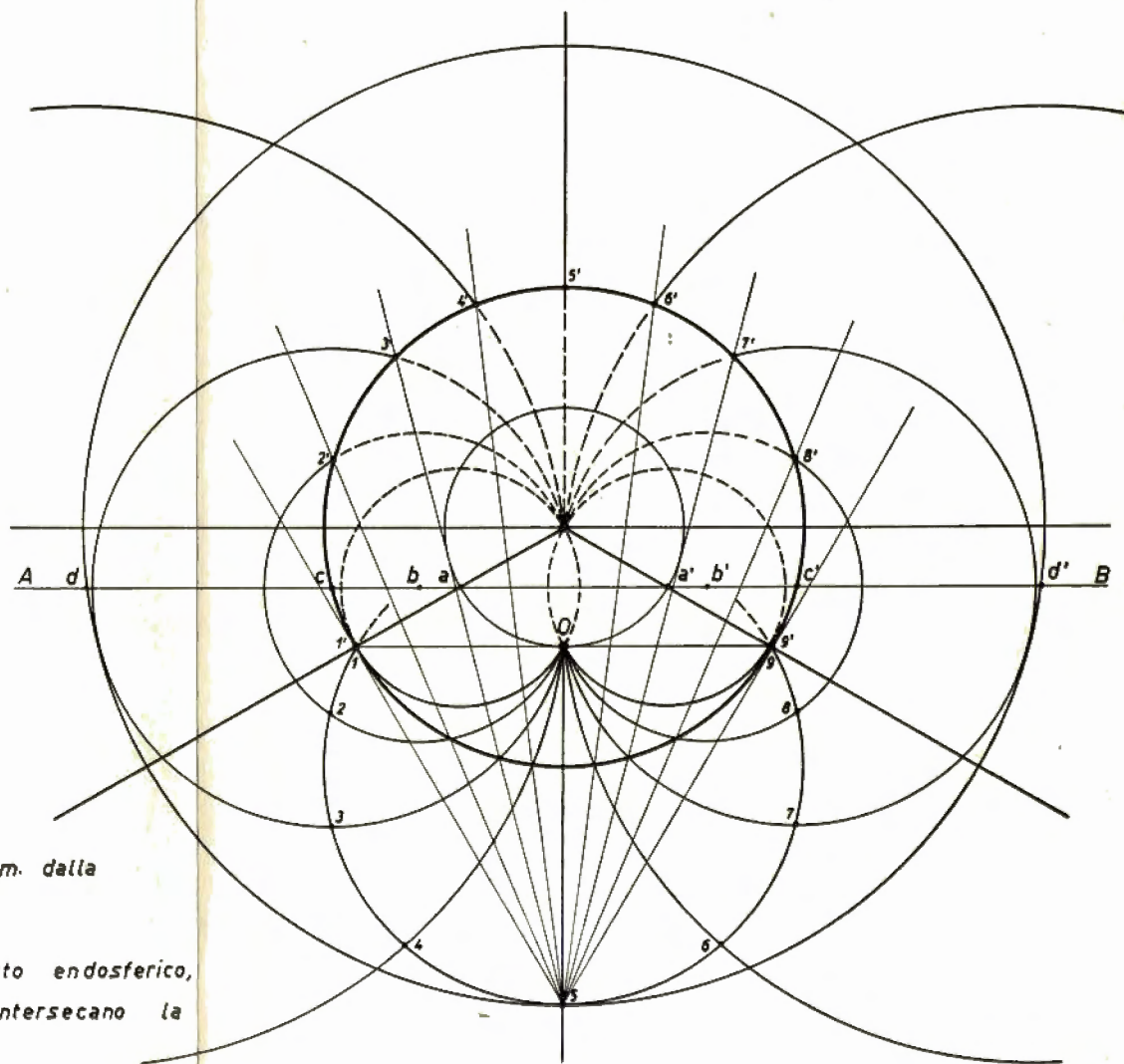
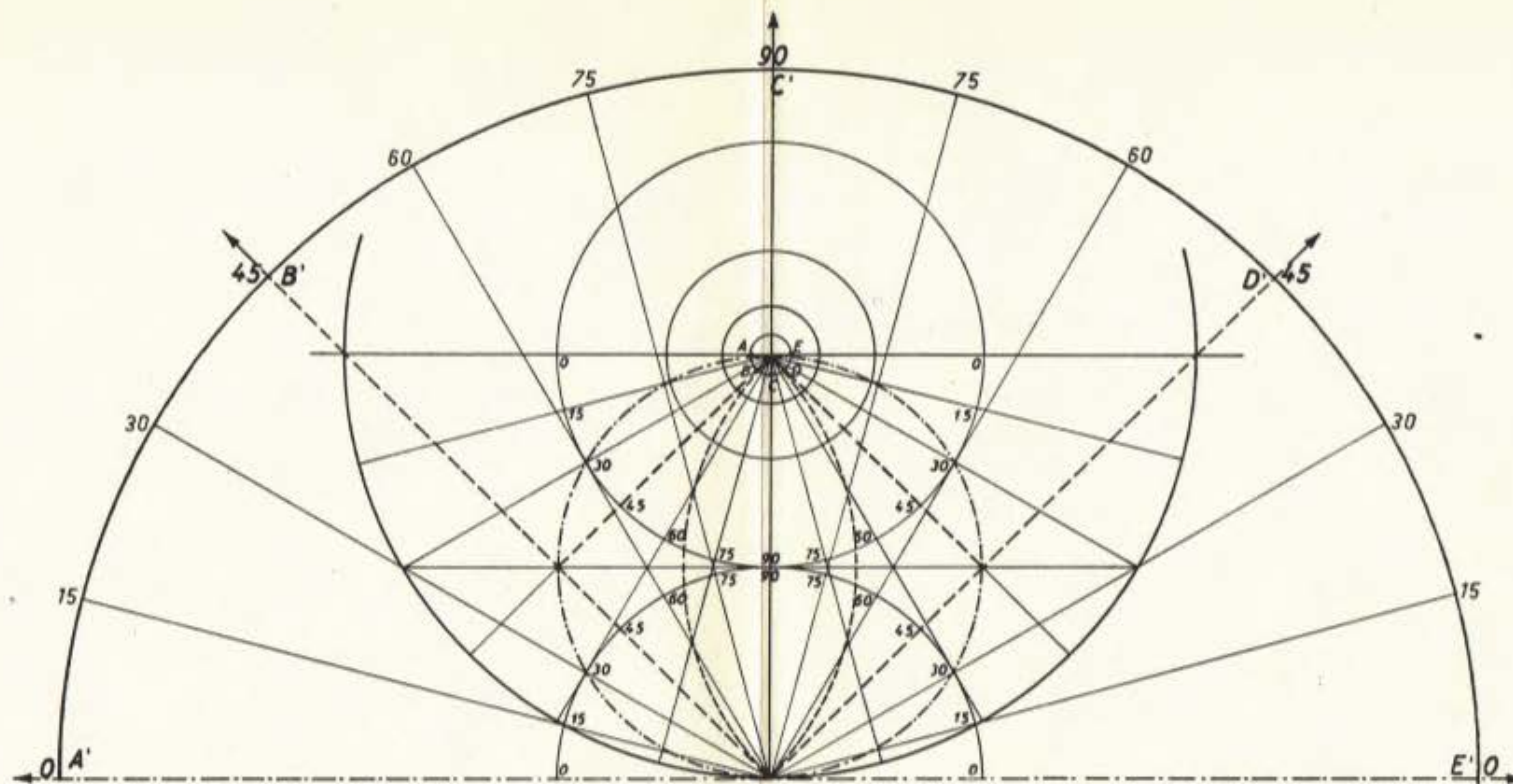
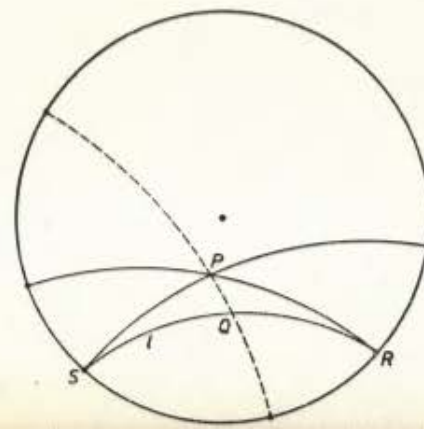
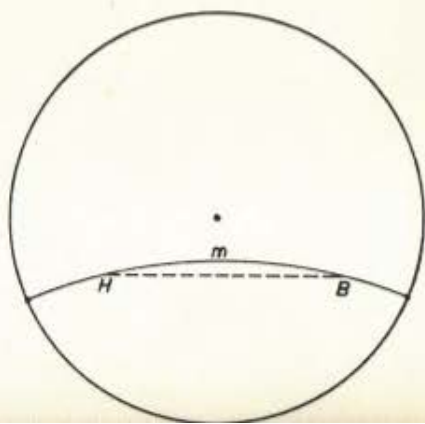



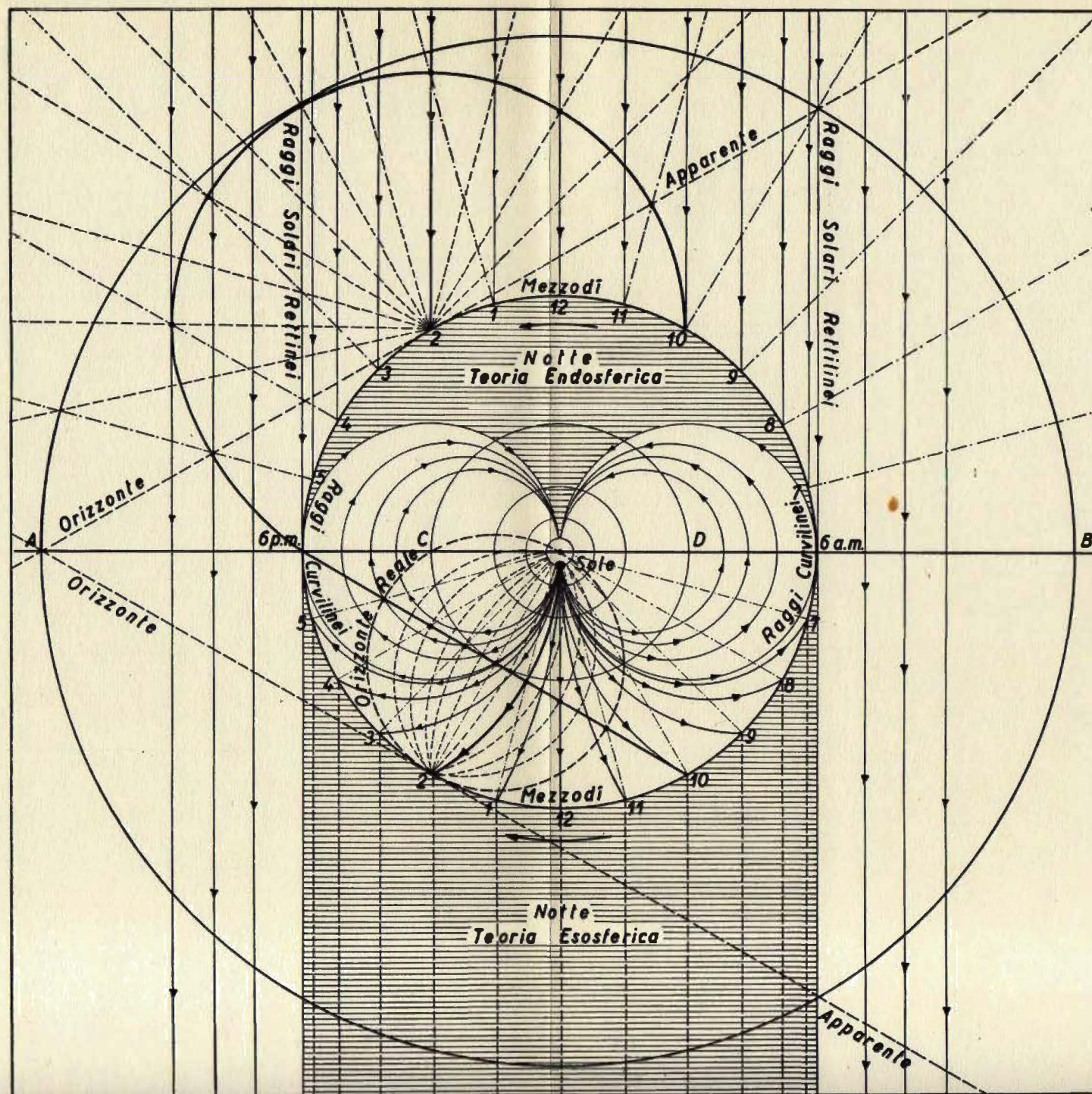
Fig. sup.: Un oggetto, situato ad una distanza di 6.400 Km. dalla terra, è a questa legato da linee attrattive rette.

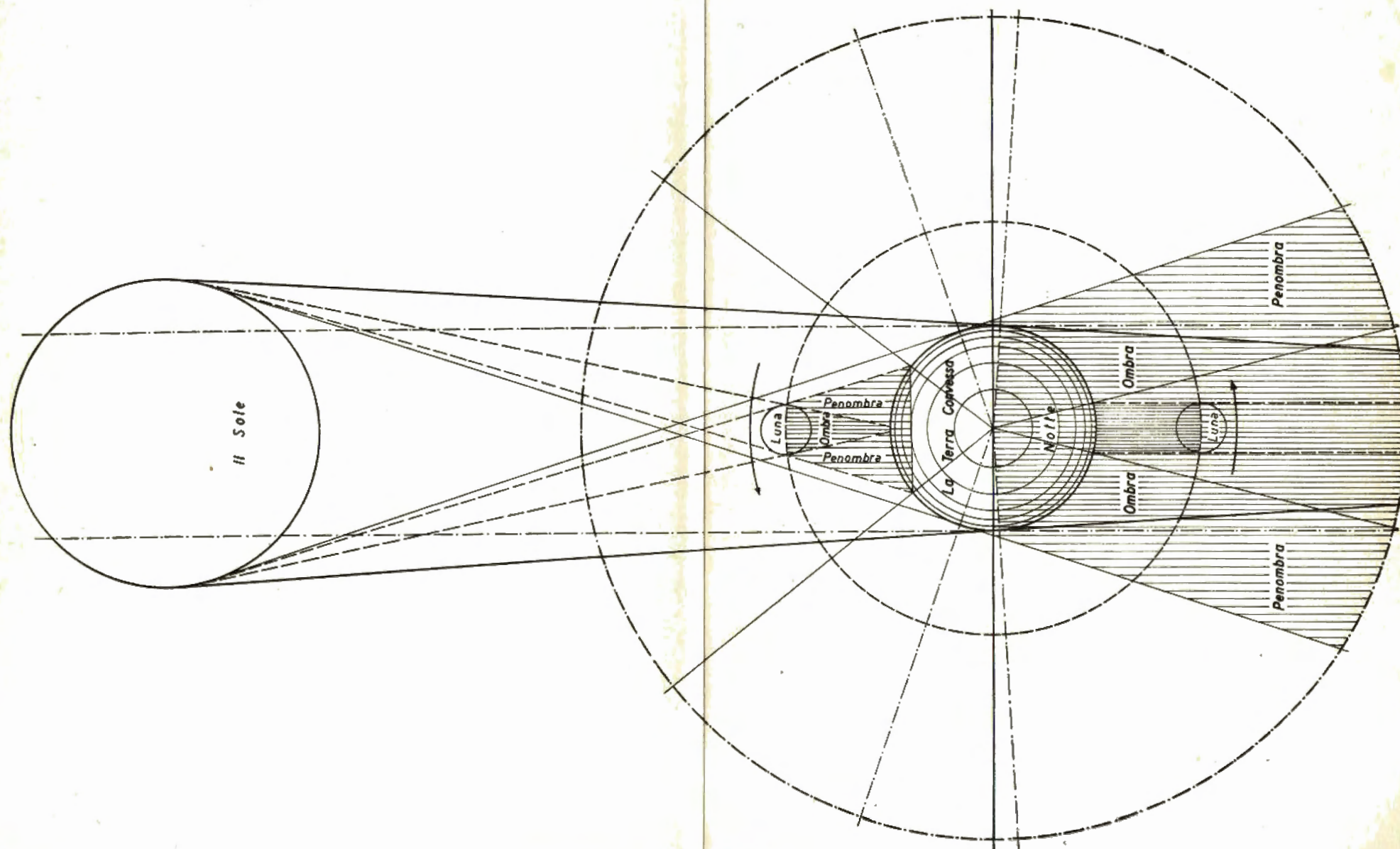
Fig. a destra: Le stesse linee di attrazione, nel concetto endosferico, sono curve, rimanendo invariati gli angoli sotto cui intersecano la superficie concava della Terra.

La volta del cielo nei due Sistemi.

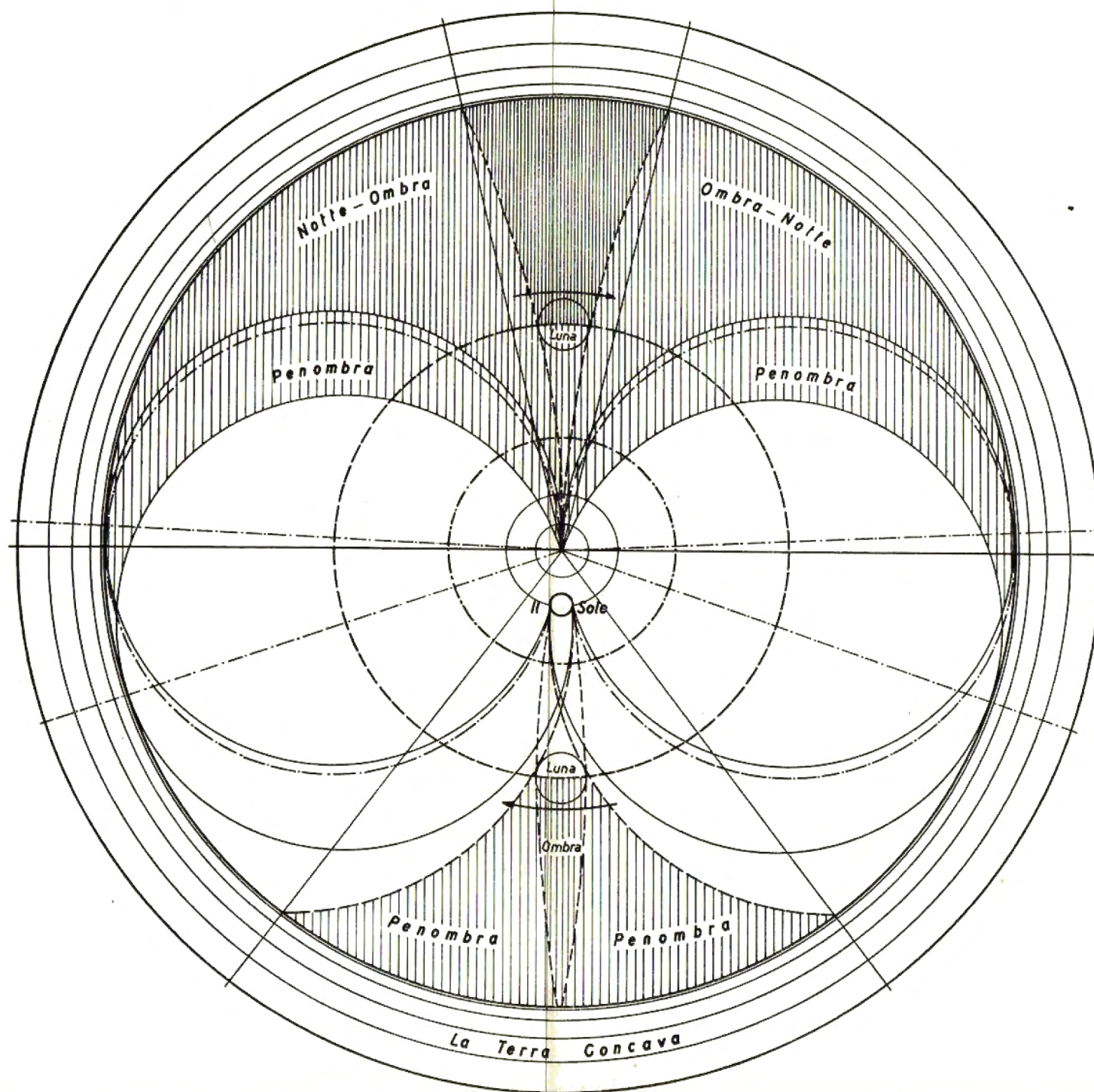
(leggasi nelle pagg. 245 e 280)

IL SISTEMA DELL'ORIZZONTE — Il metodo per coordinare i gradi celesti con i gradi dell'arco della volta apparente del cielo.

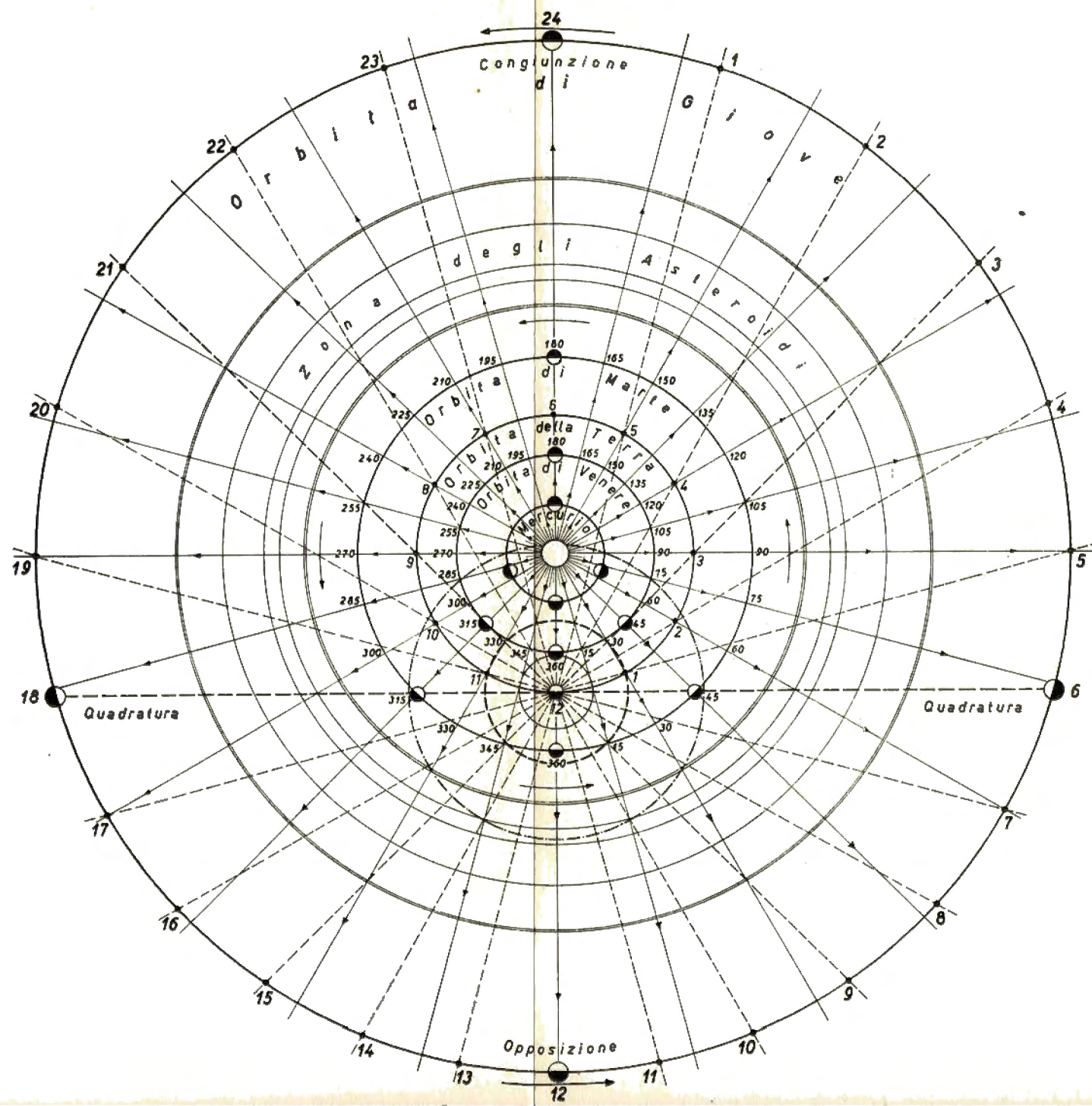
Il mondo non euclideo di Poincaré

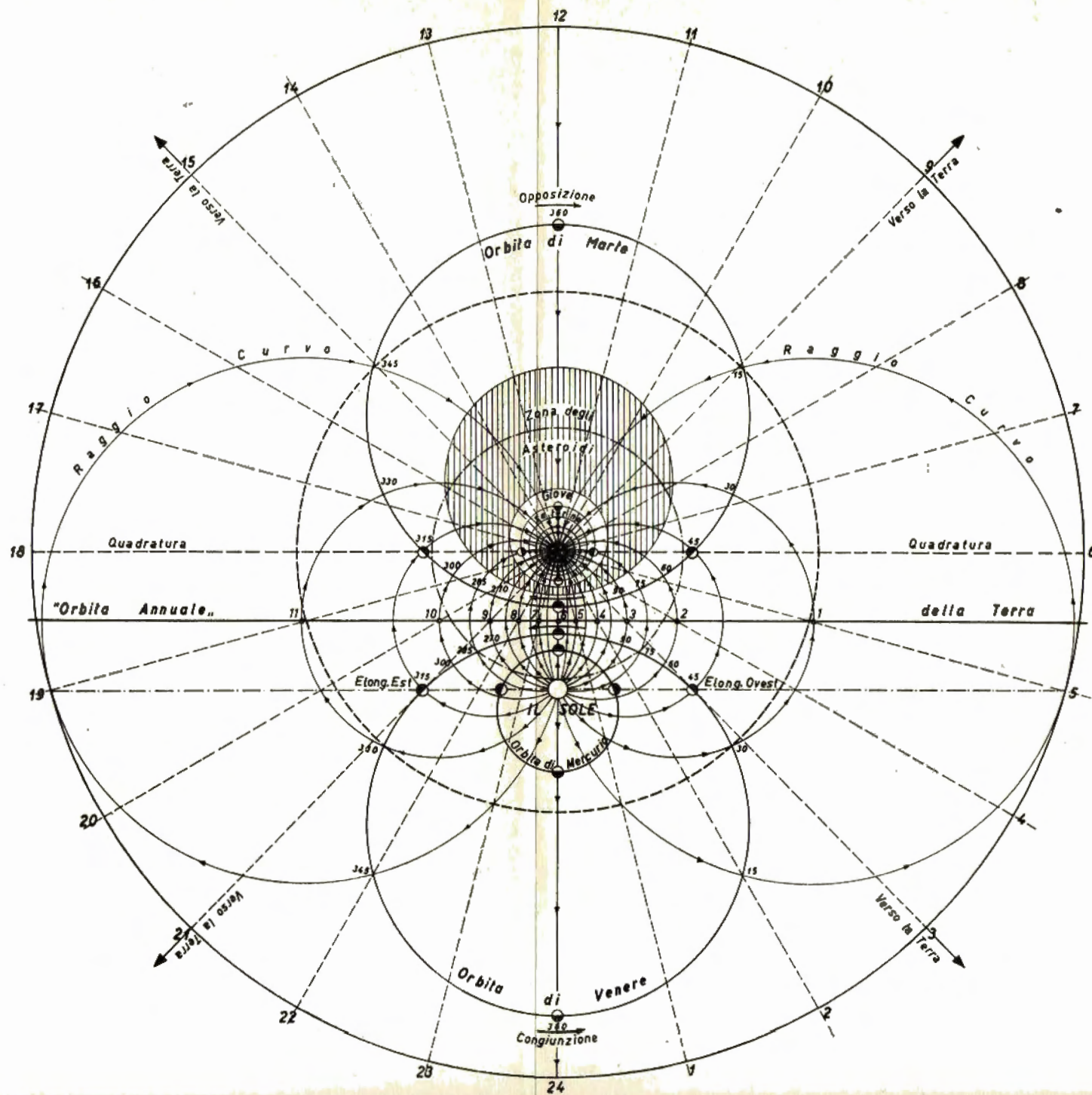
(leggasi nelle pagg. 43 e 57)

Il giorno e la notte nei due Sistemi.

(leggasi nelle pagg. 248, 263, 279 e 307)

Eclissi di Sole ed eclissi di Luna nel Sistema Eliocentrico.

(leggasi nelle pagg. 283, 285 e 286)

Eclissi di Sole ed eclissi di Luna nel Sistema Cosmocentrico.

(leggasi nelle pagg. 284, 285 e 286)

Il Sistema Eliocentrico.

(leggasi nelle pagg. 250, 262 e 271)

Il Sistema Cosmocentrico.

(leggasi nelle pagg. 250, 262 e 271)

L'Universo Endosferico.

Il Centro Stellare e il Sole sono le sorgenti del Campo Universale, le cui linee di forza sono linee geodetiche percorse dalle radiazioni solari. Un osservatore posto nel punto « mattina » vede allontanarsi e sparire una nave « sotto l'orizzonte », cioè sotto la tangente curvilinea percorsa dai raggi luminosi; volgendo indietro lo sguardo egli scorge la cima d'una montagna, i cui piedi restano anch'essi nascosti « dietro l'orizzonte ». Le volte del cielo, come appaiono nei diversi momenti della giornata (mattina, mezzogiorno, sera, mezzanotte), sono l'immagine del vero cielo interno (Tav. X). Attorno al Campo sono rappresentati i continenti e gli oceani situati sulla superficie concava della Terra.

(leggasi nelle pagg. 245, 279, 294 e 307)